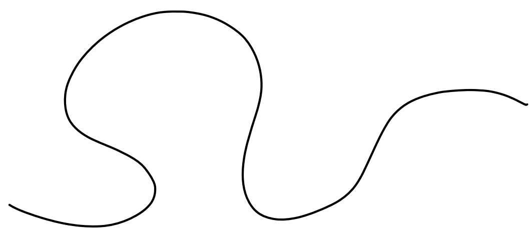
1)

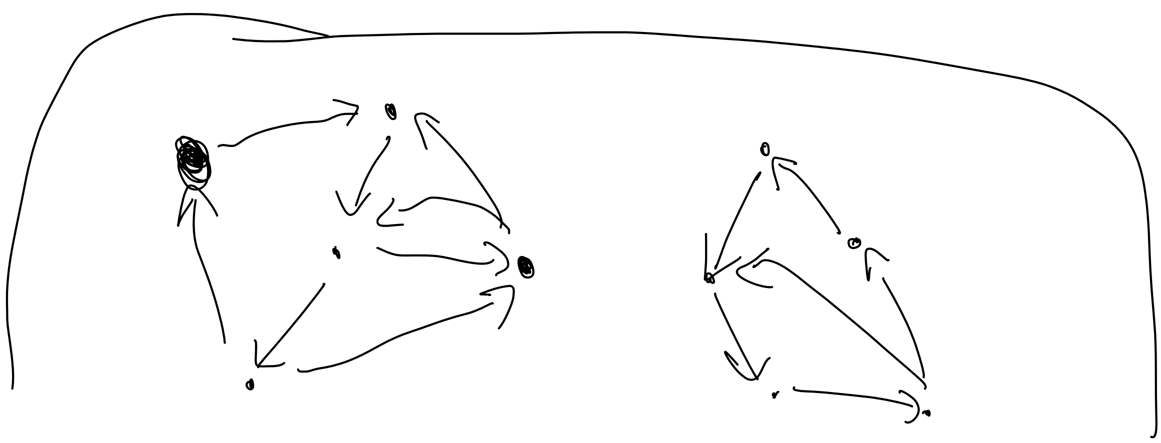
$$\begin{cases} \overbrace{x - 2y = 3 \qquad \dots}^{10^6} \\ 2x + y = 5 \\ \vdots \end{cases}$$

$10^6$

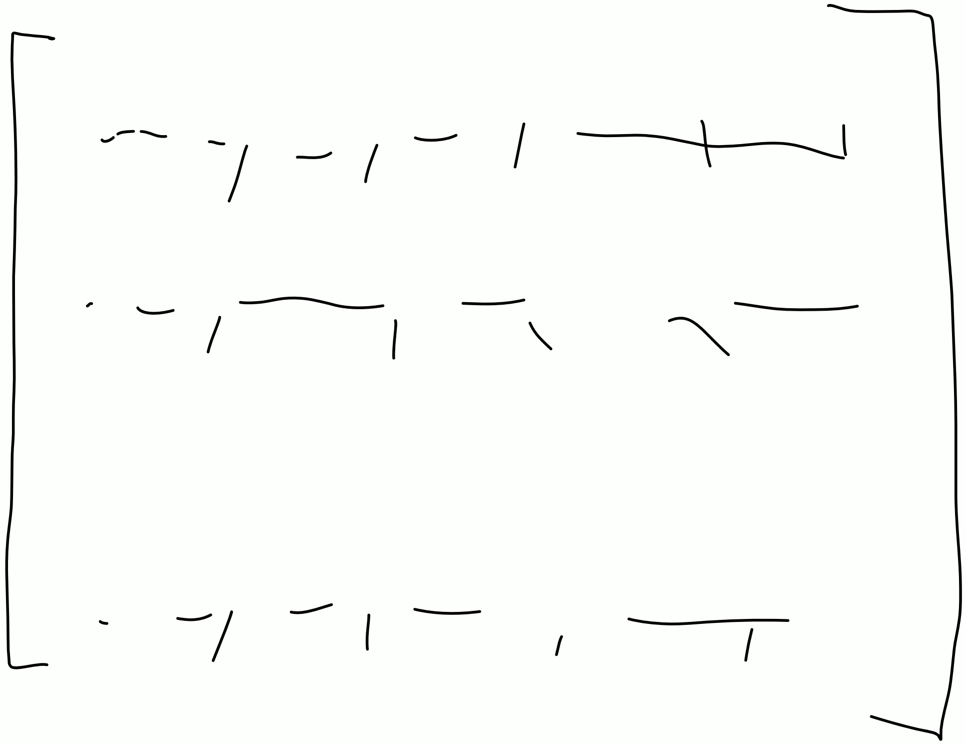
2)



3)



# Macierze



# Macierze

**Macierzą** wymiaru $n \times m$ (o $n$ wierszach i $m$ kolumnach) nazywamy tablicę liczb rzeczywistych/zespolonych

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\cancel{n}m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\cancel{n}m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

$a_{ij}$

wiersz kolumna

Piszemy również

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

lub

$$A = [a_{ij}].$$

# Dodawanie i odejmowanie macierzy

Jeżeli $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ (czyli macierze $A$ i $B$ są dokładnie tego samego wymiaru), to definiujemy $A \pm B$ wzorem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1m} \pm a_{1m} \\ a_{21} \pm b_{21} & \dots & a_{2m} \pm b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Równoważnie

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych wymiaru $n \times m$

# Mnożenie macierzy przez liczbę

Niech $c \in \mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$. Wtedy

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1m} \\ ca_{21} & \dots & ca_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \dots & ca_{nm} \end{bmatrix}.$$

Równoważnie

$$cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}].$$

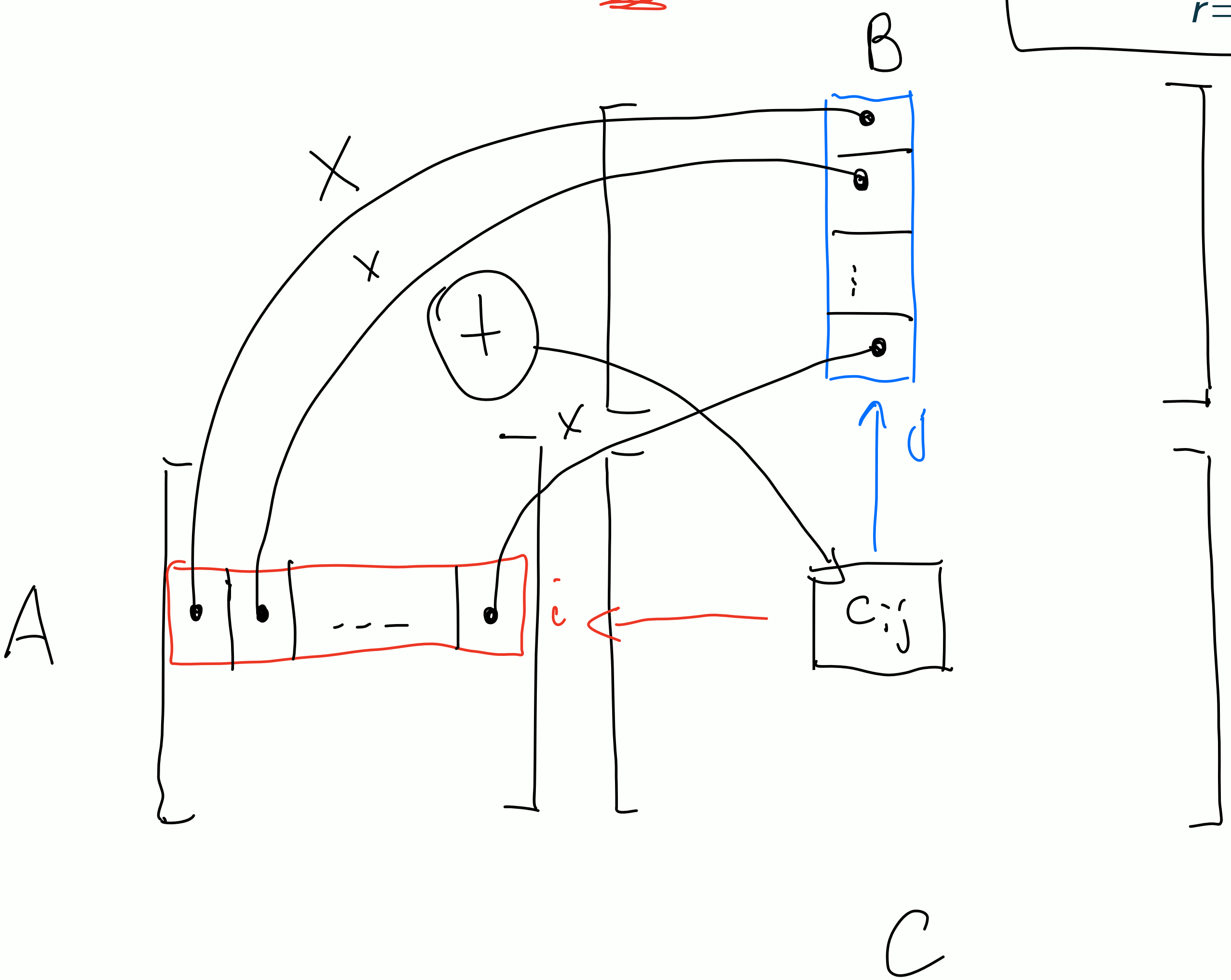
# Własności

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $(cd)A = c(dA)$

# Mnożenie macierzy

Niech $A \in \mathbb{R}_{n \times m}$ i $B \in \mathbb{R}_{m \times k}$. Definiujemy wtedy iloczyn $C = A \cdot B$ wzorem

$$C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}_{n \times k}, \qquad \boxed{c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}.}$$



# Ćwieczenie

Wykonać działania

$$4 \times 3 \qquad\qquad 3 \times 4$$

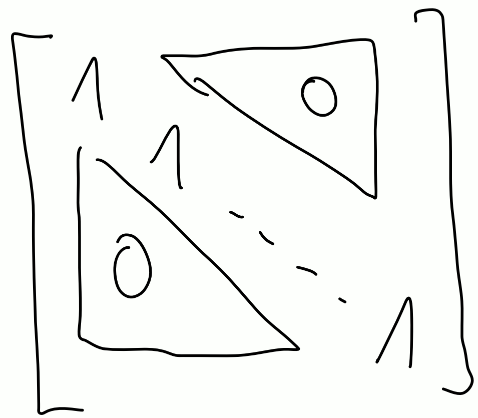
$$\cancel{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \phantom{10} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ 3 \\ \phantom{0} \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 8 & -1 & 10 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & 0 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

# Własności iloczynu

- $A(B + C) = AB + AC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B, C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $(A + B)C = AC + BC$ dla $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $c \in \mathbb{R}$
- $(AB)C = A(BC) = ABC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $C \in \mathbb{R}_{k\times \ell}$
- $AI_m = I_nA$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$

$$I_n = \begin{array}{cc} n & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & n \end{array} =$$



macierz jednostkowa

$A \in \mathbb{R}_{n\times n}$

$A \cdot I_n = I_n A = A$

# Uwagi

Mnożenie macierzy **nie jest** przemienne! Najczęściej $AB \neq BA$.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$A \cdot B$ może istnieć, podczas gdy $B \cdot A$ nie istnieje

$A$ $2 \times 3$ $AB$ istnieje

$B$ $3 \times 5$ $BA$ nie istnieje

# Uwagi

$(AB)C = A(BC)$, ale jeden z iloczynów może być łatwiejszy do policzenia!

$$\underbrace{\left(\overset{3\times 1}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}} \overset{1\times 3}{\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}}\right)}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\underbrace{\left(\overset{1\times 3}{\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}} \overset{3\times 1}{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}\right)}_{1\times 1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\6 & 2 & 2\\9 & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}_{3\times 1} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}7\\14\\21\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}7\\14\\21\end{bmatrix}$$

# Liczba mnożeń

$A \in \mathbb{R}_{n \times m}$ $\quad B \in \mathbb{R}_{m \times k}$

DeepMind

$$A \cdot B = \left[ \underbrace{\sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}}_{m \text{ mnożeń}} \right]_{n \times k}$$

$m \cdot n \cdot k$ mnożeń

$A, B \in \mathbb{R}_{n \times n} \to A \cdot B \quad \underline{n^3}$ mnożeń

$n^3$

$n^{2.71\ldots}$

$\vdots$

$\underline{n^{2.3\ldots}}$

?

$n^2$

# Liczba mnożeń

Niech $A \in \mathbb{R}_{20\times 2}$, $B \in \mathbb{R}_{2\times 10}$, $C \in \mathbb{R}_{10\times 1}$.

Koszt obliczenia $(AB)C$:

- $\rightsquigarrow$ $AB$: $20\cdot 2\cdot 10 = 400$ — $20\times 10$
- $\rightsquigarrow$ $(AB)C$: $20\cdot 10\cdot 1 = 200$

600 mnożeń

Koszt obliczenia $A(BC)$:

- $\rightsquigarrow$ $BC$: $2\cdot 10\cdot 1 = 20$ — $2\times 1$
- $\rightsquigarrow$ $A(BC)$: $20\cdot 2\cdot 1 = 40$

60 mnożeń

# Problem optymalnego nawiasowania

$$(A_1 \cdot A_2)[(A_3 \cdot \ldots) \cdot (A_i \cdot \ldots) \cdot \ldots \cdot A_n]$$

$$\binom{2n}{n}$$

# Problem optymalnego nawiasowania

Znaleźć optymalne nawiasowanie dla iloczynu

$$A_1 A_2 \ldots A_n.$$

# Własność optymalnej podstruktury

**Twierdzenie**

*Optymalne rozwiązanie zagadnienia nawiasowania jest funkcją optymalnych rozwiązań podproblemów, to znaczy w optymalnym nawiasowaniu $A_1 \dots A_n$ każdy blok $A_i \dots A_j$ powinien być nawiasowany według optymalnego nawiasowania tego bloku.*

$$A_1 \Big( \dots \Big[ \big( A_i \dots \big) \Big) \Big( \big( \big( A_j \big) \Big] \dots \Big) A_n$$

$$A_k \, A_{k+1}$$

# Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$

# Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$
- $k[i][i] := 0$

## Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$

- $k[i][i] := 0$

$A_i \ldots A_m$ $\quad$ $A_{m+1} \ldots A_j$

- $k[i][j] := \min_{i \leqslant m < j} \{ k[i][m] + k[m+1][j] + a_i a_{m+1} a_{j+1} \}$

$A_1 A_2 A_3 A_4$

$A_1 + A_2 A_3 A_4 +$

$A_1 A_2 \quad A_3 A_4$

$A_1 A_2 A_3 \quad A_4$

# Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \dots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$
- $k[i][i] := 0$
- $k[i][j] := \min_{i \leqslant m < j} \{k[i][m] + k[m+1][j] + a_i a_{m+1} a_{j+1}\}$
- $k[1][n]$ – rozwiązanie problemu

# Algorytmy dynamiczne

Podobne podejście można stosować do

- problemu plecakowego,
- problemu komiwojażera,
- obliczania odległości Levenshteina,
- ...

# Wyznaczniki

$$\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & W \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{R}_{n\times m} & & \mathbb{R} \end{array}$$

# Wyznaczniki

Niech $A$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n$. **Wyznacznikiem** macierzy $A$ nazywamy liczbę $\det A$ (lub $|A|$) zdefiniowaną rekurencyjnie

$\rightsquigarrow$ $\det A = a_{11}$ dla $n = 1$ i $A = [a_{11}]$

# Wyznaczniki

Niech $A$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n$. **Wyznacznikiem** macierzy $A$ nazywamy liczbę $\det A$ (lub $|A|$) zdefiniowaną rekurencyjnie

- $\det A = a_{11}$ dla $n = 1$ i $A = [a_{11}]$
- $\det A =$
  $(-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \cdots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$
  dla $n > 1$, gdzie $A_{in}$ jest macierzą powstałą z macierzy $A$ przez skreślenie $i$-tego wiersza i $n$-tej kolumny

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det [a_{21}] + (-1)^{\overset{2+2}{n}} \cdot a_{22} \cdot \det [a_{11}] =$$

$$= -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

# Wyznaczniki

Niech $A$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n$. **Wyznacznikiem** macierzy $A$ nazywamy liczbę $\det A$ (lub $|A|$) zdefiniowaną rekurencyjnie

- $\det A = a_{11}$ dla $n = 1$ i $A = [a_{11}]$
- $\det A =$
  $(-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \cdots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$
  dla $n > 1$, gdzie $A_{in}$ jest macierzą powstałą z macierzy $A$ przez skreślenie $i$-tego wiersza i $n$-tej kolumny

Dla $n = 2$ mamy

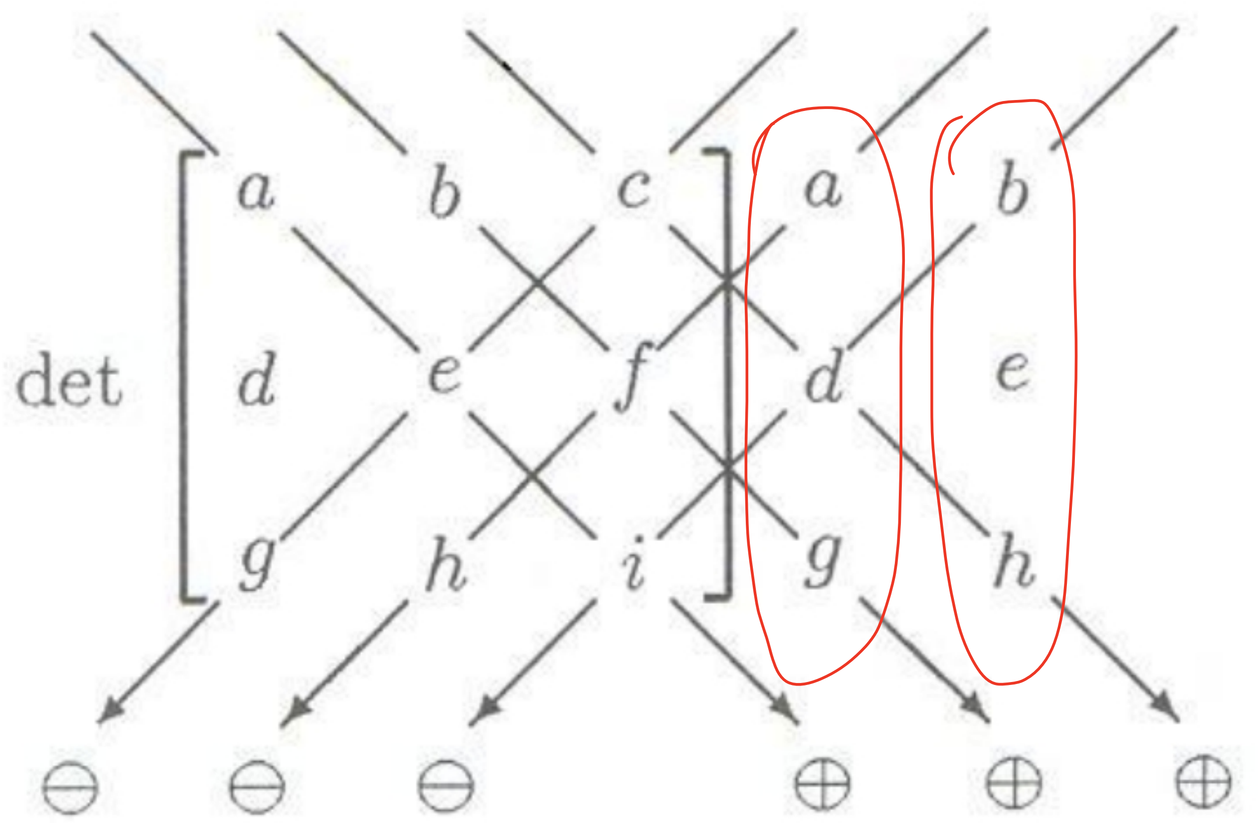
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Dla $n = 3$ mamy

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

Dla $n = 3$ mamy

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$



# Własności wyznaczników

- $\det A = \det A^T$, gdzie $A^T$ jest **transpozycją** macierzy $A$, to znaczy macierzą, w której wiersze macierzy $A$ są kolumnami macierzy $A^T$ ($A^T = [a_{ji}]$)

# Własności wyznaczników

- $\det A = \det A^T$, gdzie $A^T$ jest **transpozycją** macierzy $A$, to znaczy macierzą, w której wiersze macierzy $A$ są kolumnami macierzy $A^T$ ($A^T = [a_{ji}]$)
- $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$
  $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Własności wyznaczników

- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = \cancel{c} \det A$.

$c$

$A \in \mathbb{R}_{n \times n}$

$$\det(cA) = c^n \det(A)$$

# Własności wyznaczników

- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = a \det A$.
- Jeśli macierz $A$ zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.

## Własności wyznaczników

- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = a \det A$.
- Jeśli macierz $A$ zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez liczbę $c$, to $\det B = \det A$.

# Własności wyznaczników

- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = a \det A$.
- Jeśli macierz $A$ zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez liczbę $c$, to $\det B = \det A$.
- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

# Własności wyznaczników

- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = a \det A$.
- Jeśli macierz $A$ zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez liczbę $c$, to $\det B = \det A$.
- Jeśli macierz $B$ powstała z macierzy $A$ przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Wszystkie wymienione własności zachodzą również dla wierszy.

# Wzór Laplace'a

Niech $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ dla $n > 1$. Dla dowolnego $i$ mamy

$$\det A = (-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i} + (-1)^{2+i} a_{2i} \det A_{2i} + \cdots + \\ + (-1)^{n+i} a_{ni} \det A_{ni}$$

oraz

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + \\ + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+2}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(-1+2) + 0 - (1-(-2)) =$$

$$= -6$$

# Wzór Cauchy'ego

Dla $A, B \in \mathbb{R}_{n \times n}$ mamy

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

# Ćwiczenie

Sprawdzić, że

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} + 0 =$$

$$= a_{11} (-1)^{1+1} \cdot a_{22} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3 - \frac{2}{5} w_2}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -2$$

# Macierz odwrotna

Macierz $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ nazywamy **odwracalną**, jeżeli istnieje taka macierz $B \in \mathbb{R}_{n\times n}$, że

$$AB = BA = I_n.$$

# Macierz odwrotna

Macierz $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ nazywamy **odwracalną**, jeżeli istnieje taka macierz $B \in \mathbb{R}_{n \times n}$, że
$$AB = BA = I_n.$$

Macierz $B$ nazywamy macierzą **odwrotną** do $A$ i oznaczamy $A^{-1}$.

# Macierz odwrotna

## Twierdzenie

*Macierz $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ ma macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\det A \neq 0.$$

# Macierz odwrotna

## Twierdzenie

*Macierz* $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ *ma macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\det A \neq 0.$$

*Macierz* $A^{-1} = [b_{ij}]$ *dana jest wtedy wzorem*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

*gdzie* $A_{ji}$ *jest macierzą powstałą z macierzy* $A$ *przez skreślenie* $j$*-tego wiersza oraz* $i$*-tej kolumny.*

# Własności

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

# Algorytm Gaussa

$$[A|I_n] \xrightarrow{\text{operacje elementarne}} [I_n|A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{c} A \end{array}\right] \,\vdots\, \left[\begin{array}{c} I_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} I_n \end{array}\right] \,\vdots\, \left[\begin{array}{c} A^{-1} \end{array}\right]$$

# Algorytm Gausса

$$[A|I_n] \xrightarrow{\text{operacje elementarne}} [I_n|A^{-1}]$$

Operacje elementarne

- mnożenie wiersza przez liczbę różną od zera,
- zamiana wierszy miejscami,
- dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę.

# Ćwiczenie

Wyznaczyć dwiema metodami macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6. \end{bmatrix}$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 - 2w_1}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{w_3 - \frac{6}{5} w_2}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{w_3 \cdot \frac{5}{21}}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{21} & -\frac{6}{21} & \frac{5}{21} \end{array}\right]
\xrightarrow[w_1 - 2w_3]{w_2 + 6w_3}
$$

$$
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{33}{21} & -\frac{36}{21} & \frac{30}{21} \\ 0 & -5 & 0 & -\frac{30}{21} & -\frac{15}{21} & \frac{30}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{21} & -\frac{6}{21} & \frac{5}{21} \end{array}\right]
\xrightarrow{w_2 : (-5)}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{33}{21} & -\frac{36}{21} & \frac{30}{21} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{6}{21} & \frac{3}{21} & -\frac{6}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{21} & -\frac{6}{21} & \frac{5}{21} \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{w_1 - 2w_2}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{21} & -\frac{42}{21} & \frac{42}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{21} & \frac{3}{21} & -\frac{6}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{21} & -\frac{6}{21} & \frac{5}{21} \end{array}\right]
$$

$$
A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 21 & -42 & 42 \\ 6 & 3 & -6 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}
$$