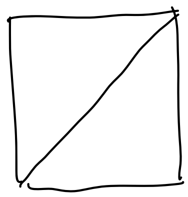
$1, 2, 3, 4, \dots$ $+$ $\cdot$ ✓ $\mathbb{N}$

$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ $-$ $\mathbb{Z}$

$m, n \in \mathbb{Z}$ $\frac{m}{n}$, $n \neq 0$ $/$ $\mathbb{Q}$



1 1 $\sqrt{2}$ $\mathbb{R}$

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$

?

Czy równanie

$$x + 1 = 0$$

ma rozwiązanie?

w $\mathbb{N}$? NIE

w $\mathbb{Z}$? TAK

Czy równanie

$$x^2 = 2$$

ma rozwiązanie?

w $\mathbb{Q}$? NIE

w $\mathbb{R}$? TAK $\sqrt{2}$

Czy równanie

$$x^2 = -1$$

ma rozwiązanie?

w $\mathbb{R}$? NIE

w $\boxed{}$? TAK

$\mathbb{R} \subset \boxed{}$

Liczby zespolone

Wprowadźmy w zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ następujące działania:

- dodawanie

$$\boxed{(a, b) + (c, d) \overset{def}{=} (a + c, b + d),}$$

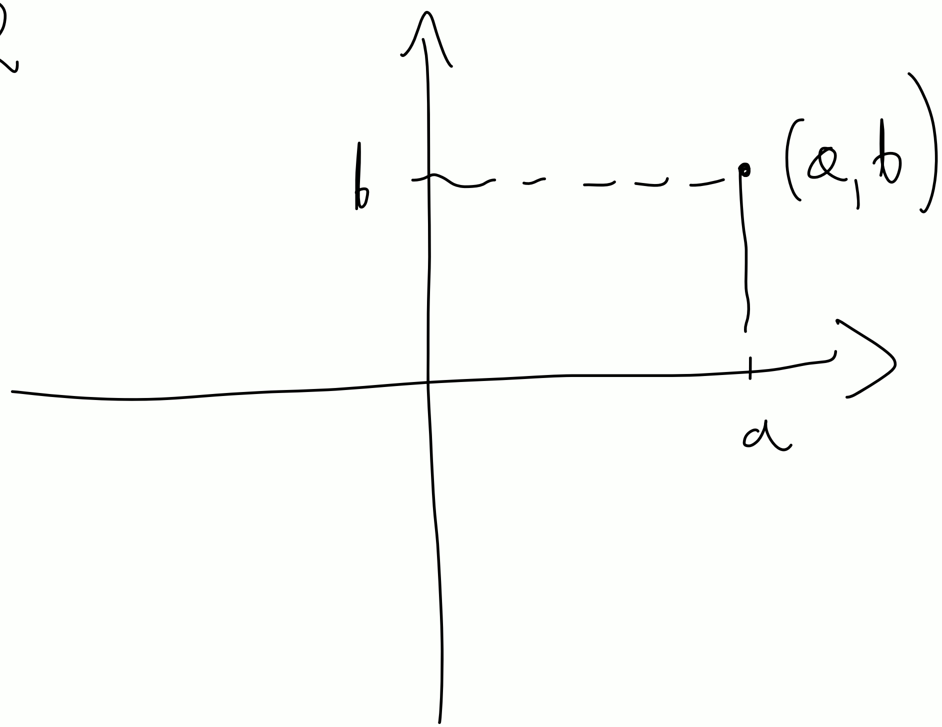
$+$

- mnożenie

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

$\circ$

$\mathbb{R}^2$



Liczby zespolone

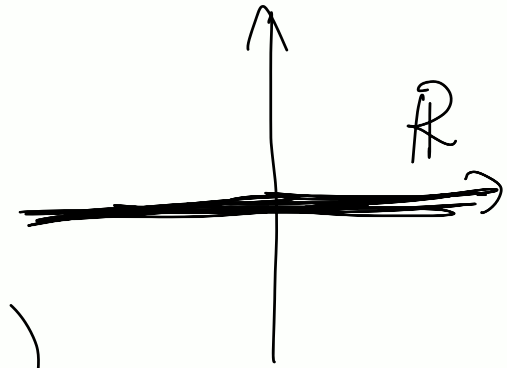
Wprowadźmy w zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ następujące działania:

- dodawanie
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
- mnożenie
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Zbiór $\mathbb{R}^2$ z takimi działaniami $+$ i $\cdot$ nazywamy zbiorem **liczb zespolonych** i oznaczamy $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$(a,0) \sim a \in \mathbb{R}$$



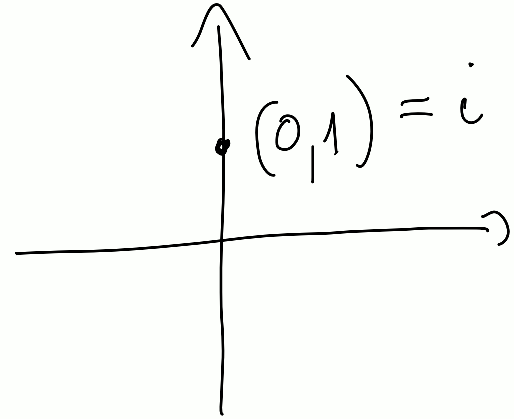
$$\underset{\substack{\wr \\ a}}{(a,0)} + \underset{\substack{\wr \\ b}}{(b,0)} = \underset{\substack{\wr \\ a+b}}{(a+b,0)}$$

$$\underset{\substack{\wr \\ a}}{(a,0)} \cdot \underset{\substack{\wr \\ b}}{(b,0)} = (a\cdot b - 0\cdot 0,\ a\cdot 0 + 0\cdot b) = \underset{\substack{\wr \\ ab}}{(ab,0)}$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

i

$$i = (0,1)$$



$$i \cdot i = \underbrace{(0,1)}_{i} \cdot \underbrace{(0,1)}_{i} = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = \underbrace{(-1,0)}_{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$\boxed{x^2 = -1}$$

w $\mathbb{C}$ ma rozwiązanie !

Działania

$$(a,b)+(c,d) = (a+b,\ c+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = a\underset{\substack{\wr \\ 1}}{(1,0)} + b\underset{\substack{\wr \\ i}}{(0,1)} =$$

$$(a,b) = a+bi$$

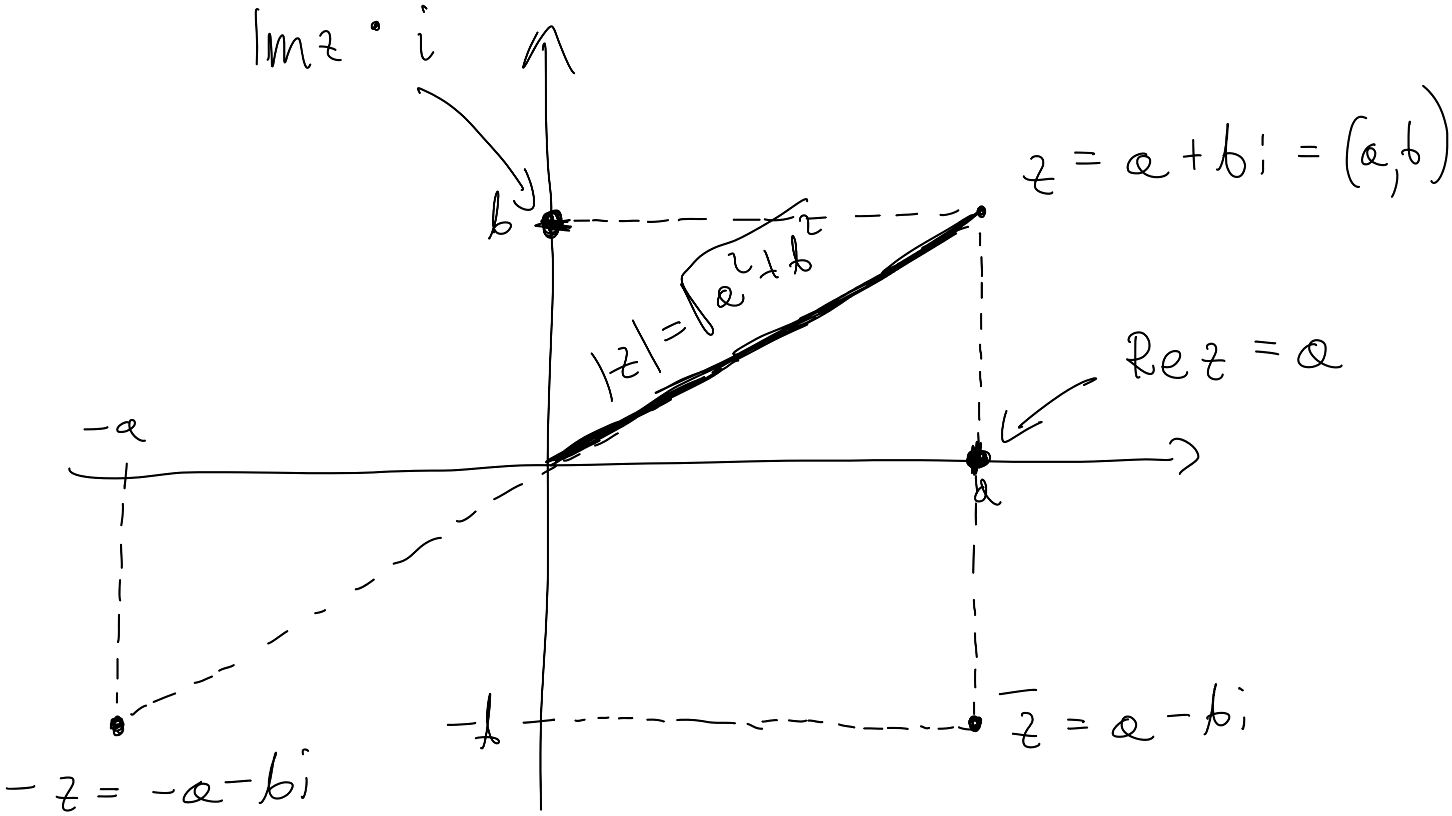
$$(a,b)+(c,d) = a+bi + c+di = a+c + (b+d)i =$$
$$= (a+c,\ b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bic + bidi =$$
$$= ac + (ad+bc)i + \underset{-bd}{\underline{bd\,i^2}} = ac - bd + (ad+bc)i$$

Definicje

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

- $\rightsquigarrow$ Liczba z jest punktem (a, b) na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$.
- $\rightsquigarrow$ Liczbę $\bar{z} = a - bi$ nazywamy **sprzężeniem** liczby z.
- $\rightsquigarrow$ Liczbę nieujemną $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy **modułem** liczby z.
- $\rightsquigarrow$ Liczbę $\operatorname{Re} z = a$ nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z.
- $\rightsquigarrow$ Liczbę $\operatorname{Im} z = b$ nazywamy **częścią urojoną** liczby z.



$z \in \mathbb{C}$ $\qquad \dfrac{z}{w}$?

$w \in \mathbb{C}$

$z = a + bi$

Własności

- $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.
- Równość $z = w$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w, \qquad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

- $z\bar{z} = |z|^2$.
- Jeżeli $z \neq 0$, to

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{bia} - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$-b^2$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

Przykłady

- Obliczyć

$$(2+i)(3-4i). = 6+3i-8i\underbrace{-4i^2}_{-4} = $$

$$= 10-5i$$

- Obliczyć

$$\frac{3+2i}{2-i}.$$

$$\frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+4i+2i^2}{2^2+(-1)^2} = $$

-2

$$= \frac{4+7i}{5} = \frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$$

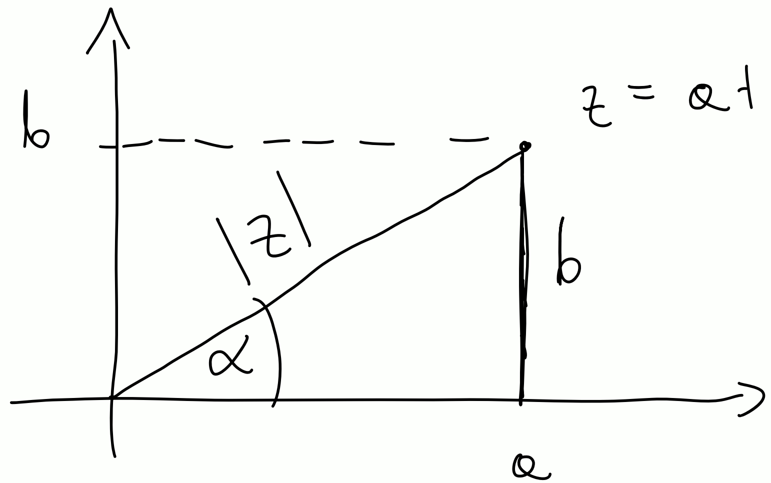
Postać algebraiczna

Zapis

$$z = a + bi$$

nazywamy **postacią algebraiczną** liczby z.

Postać trygonometryczna



$$z = a + bi \sim (|z|, \alpha)$$

$$\sim (a, b)$$

$$z = a + bi = |z|\left(\underbrace{\frac{a}{|z|}}_{=\cos\alpha} + \underbrace{\frac{b}{|z|}}_{=\sin\alpha} i\right) =$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

$$= |z|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$$

Podstać trygonometryczna

Zapis

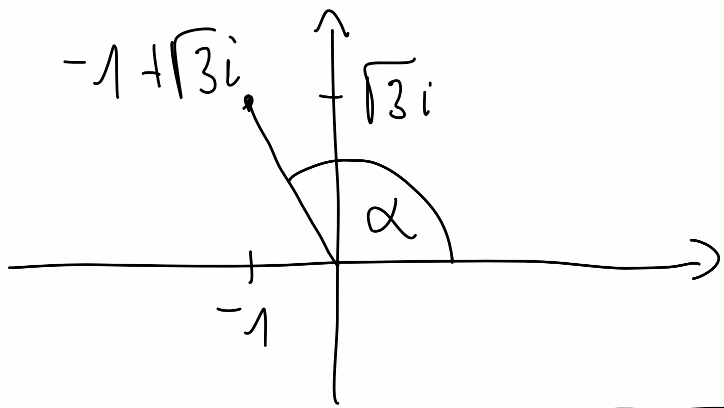
$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby z.

Liczbę α nazywamy **argumentem** liczby $z \neq 0$. Jeżeli $\alpha \in [0, 2\pi)$, to liczbę tę nazywamy **argumentem głównym**.

Przykład

Zapisać liczbę $z = -1 + \sqrt{3}i$ w postaci trygonometrycznej.



$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$-1+\sqrt{3}i = 2\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\alpha} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\alpha} i\Big) = 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

Twierdzenie

Niech

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

oraz

$$w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Wtedy

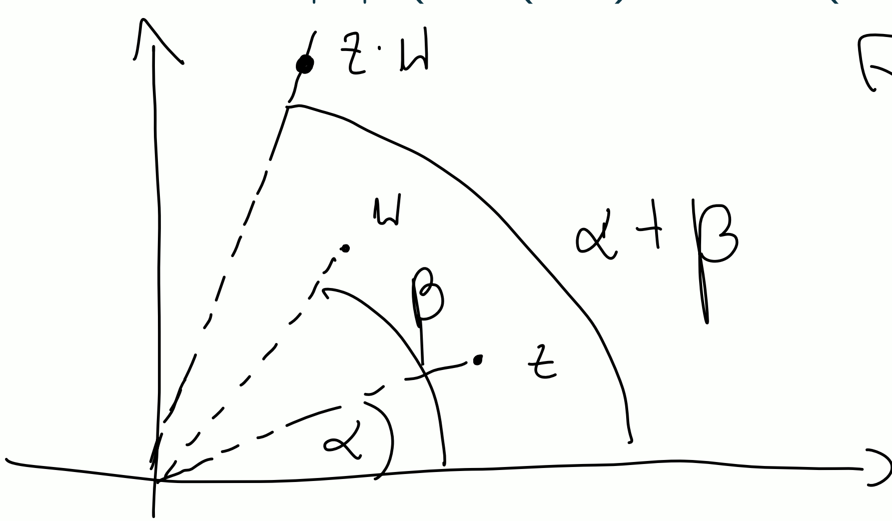
$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

$$(|z|, \alpha) \cdot (|w|, \beta) = \left(|z|\cdot|w|, \alpha+\beta\right)$$

W szczególności

$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)).$$

wzór de Moivre'a–Laplace'a



Przykład

Wyznaczyć
$$(1+i)^{100}.$$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\alpha} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\alpha}i\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^{100} = \left(\sqrt{2}\right)^{100}\cdot\left(\cos\overbrace{\left(\frac{\pi}{4}\cdot 100\right)}^{25\pi} + i\sin\overbrace{\left(\frac{\pi}{4}\cdot 100\right)}^{25\pi}\right) =$$

$$= 2^{50}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2^{50}\left(-1 + i\cdot 0\right) =$$

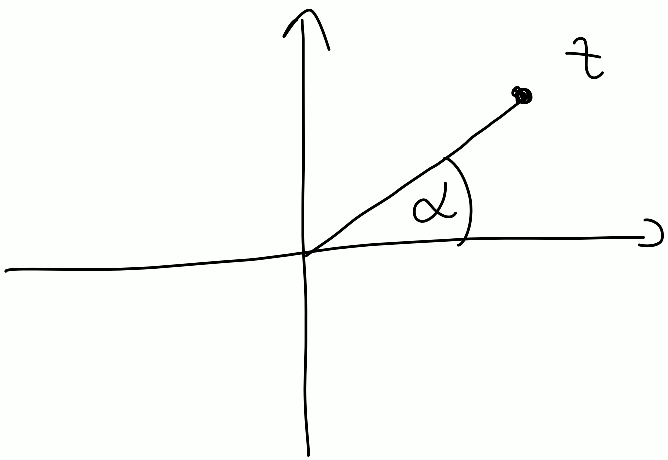
$$= -2^{50}$$

Postać wykładnicza

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$z = |z| e^{i\alpha}$$



Przykład

Wyznaczyć wzory na $\cos(3\alpha)$, $\sin(3\alpha)$ oraz $\sin(\alpha + \beta)$.

Pierwiastek zespolony

$a \geq 0$

$\sqrt{a} = b \iff b^2 = a \wedge b \geq 0$

$\sqrt{4} = 2$ $\qquad$ $\sqrt{4} = 2 \vee -2$

$a \in \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{a} = b \iff b^3 = a$

$z \in \mathbb{Z}$

$\sqrt[n]{z} = \{ w \in \mathbb{C} : w^n = z \}$

Pierwiastek zespolony

Niech $z \in \mathbb{C}$. **Pierwiastkiem zespolonym** stopnia $n \geqslant 2$ z liczby z nazywamy **zbiór**

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \colon w^n = z\}.$$

$$\sqrt{1+2i} = \{w \in \mathbb{C} : w^2 = 1+2i\}$$

$$(x+iy)^2 = 1+2i$$

$$x^2 + 2xiy + \underbrace{(iy)^2}_{-y^2} = 1+2i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 1+2i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \quad | \cdot x^2$$

$$x^4 - 1 = x^2$$

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \qquad t = x^2$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\vee \ \cancel{x^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} < 0$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$y = -\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$$

$$\sqrt{1+2i} = \left\{ \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\, i ,\ -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\, i \right\}$$

$$\sqrt{-1} = \{ i, -i \}$$

$$\sqrt{-8} = \{ \sqrt{8}\, i, -\sqrt{8} \cdot i \}$$

$a \geqslant 0$

$$\sqrt{-a} = \{ \sqrt{a}\, i, -\sqrt{a}\, i \}$$

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right) \qquad w^n = z$$

Pierwiastek zespolony

Niech $z \in \mathbb{C}$. **Pierwiastkiem zespolonym** stopnia $n \geqslant 2$ z liczby z nazywamy **zbiór**

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C}\colon\, w^n = z\}.$$

Niech

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Wtedy

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\},$$

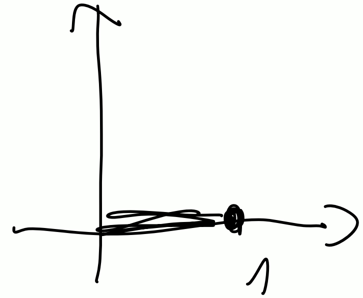
gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Przykład

Wyznaczyć (zespolony) pierwiastek $\sqrt[3]{1}$.



p. zespolony

$$1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\sqrt[3]{1} = \{z_0, z_1, z_2\}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{0+2\pi\cdot 0}{3}\right) = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = \boxed{1}$$

p. rzeczywisty

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{0+2\pi\cdot 1}{3}\right) = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{0+2\pi\cdot 2}{3}\right) = 1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

Zasadnicze twierdzenie algebry

$x^2 = -1$? $\quad$ w $\mathbb{C}$ $\quad$ TAK

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie

Każdy wielomian stopnia $\geqslant 1$ ma pierwiastek zespolony.

$$x^{100} + 38x^{50} + x + 1 = 0$$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie

Każdy wielomian stopnia $\geqslant 1$ *ma pierwiastek zespolony.*

Twierdzenie

Każdy wielomian p *stopnia* $n \geqslant 1$ *ma dokładnie* n *pierwiastków zespolonych, to znaczy istnieją takie liczby zespolone* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*, że*

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Przykład

Rozwiązać równanie

$$x^2 + 2x + 2 = 0.$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \{2i, -2i\}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2i}{2} \qquad x_2 = \frac{-2 - 2i}{2}$$

$$x_1 = -1 + i \qquad x_2 = -1 - i$$

$$(-1+i)^2 + 2(-1+i) + 2 = 1 - \cancel{2i} + i^2 - \cancel{2} + \cancel{2i} + \cancel{2} =$$

$$= 1 + (-1) = 0$$