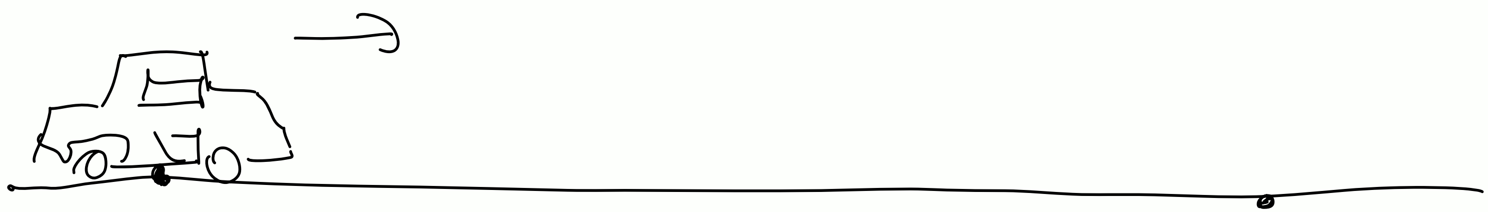
Całka oznaczona

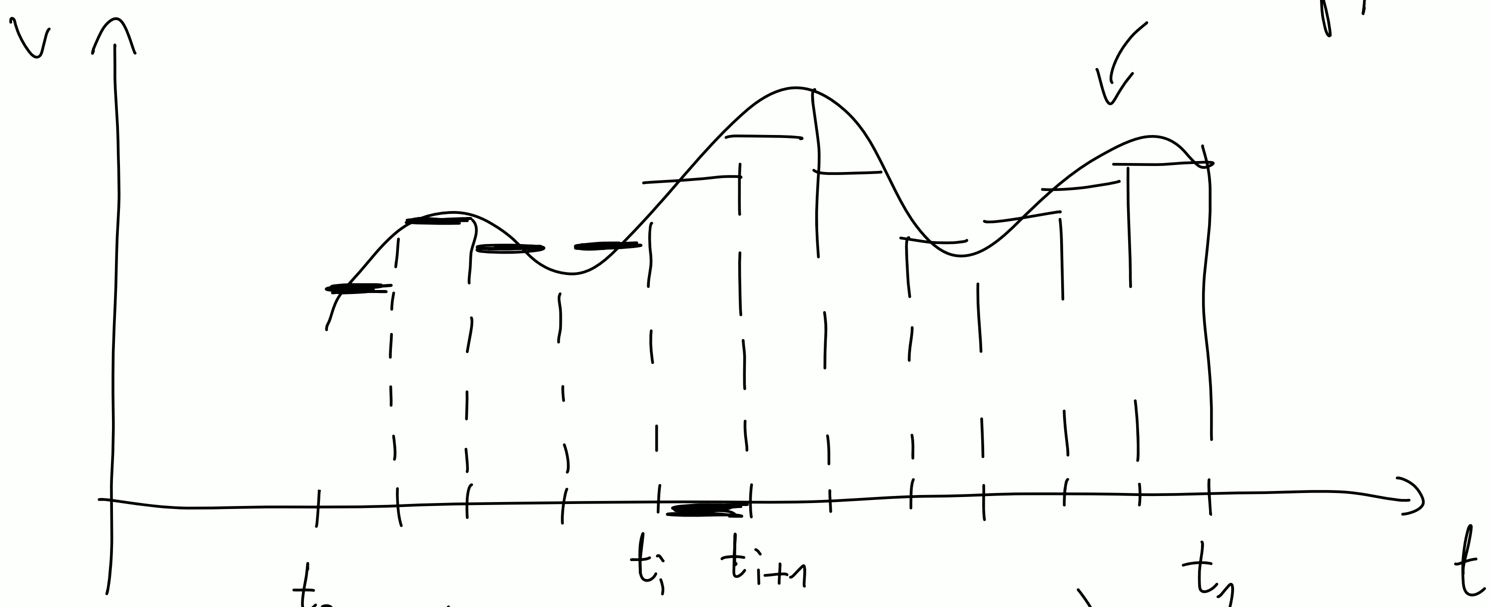


droga = prędkość · czas

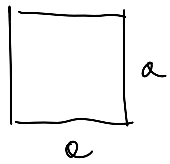
prędkość stała OK

v – prędkość

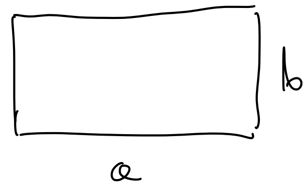
$s = ?$



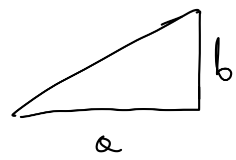
$$s \cong \text{suma}\left(v_{\substack{\text{stała}\\ \text{na } \langle t_i, t_{i+1}\rangle}} \cdot (t_{i+1} - t_i)\right)$$



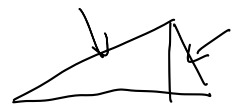
a^2

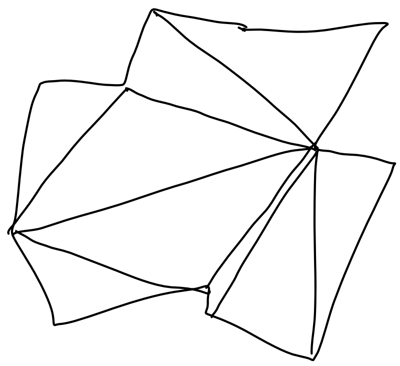


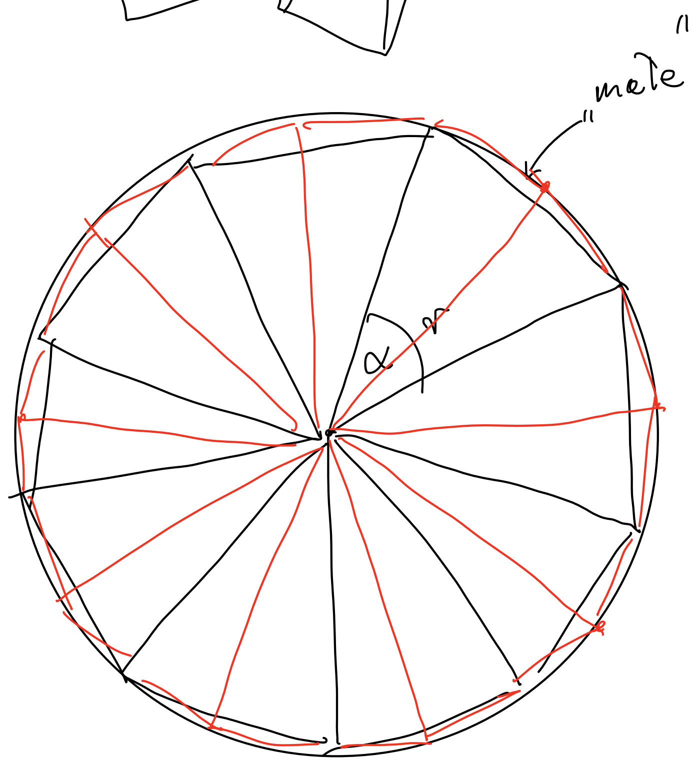
ab



$\frac{ab}{2}$



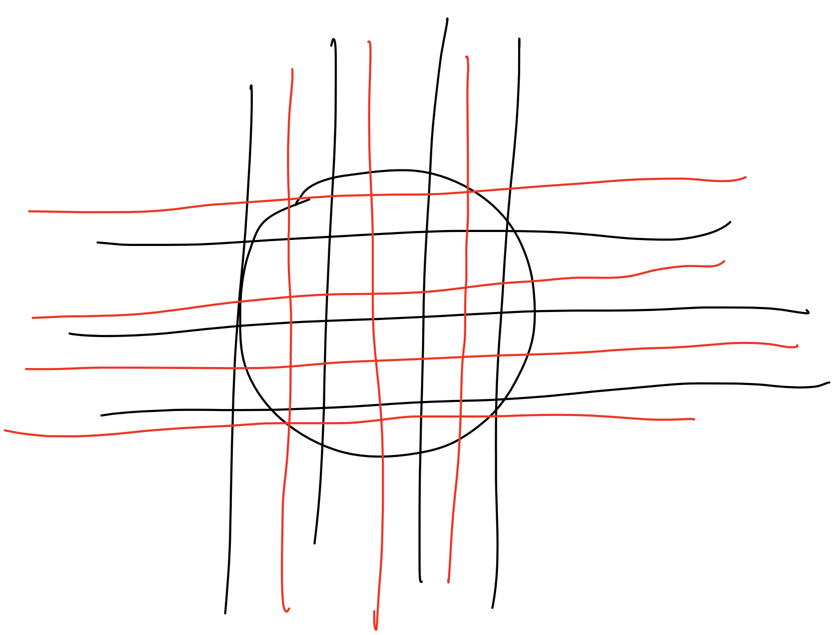


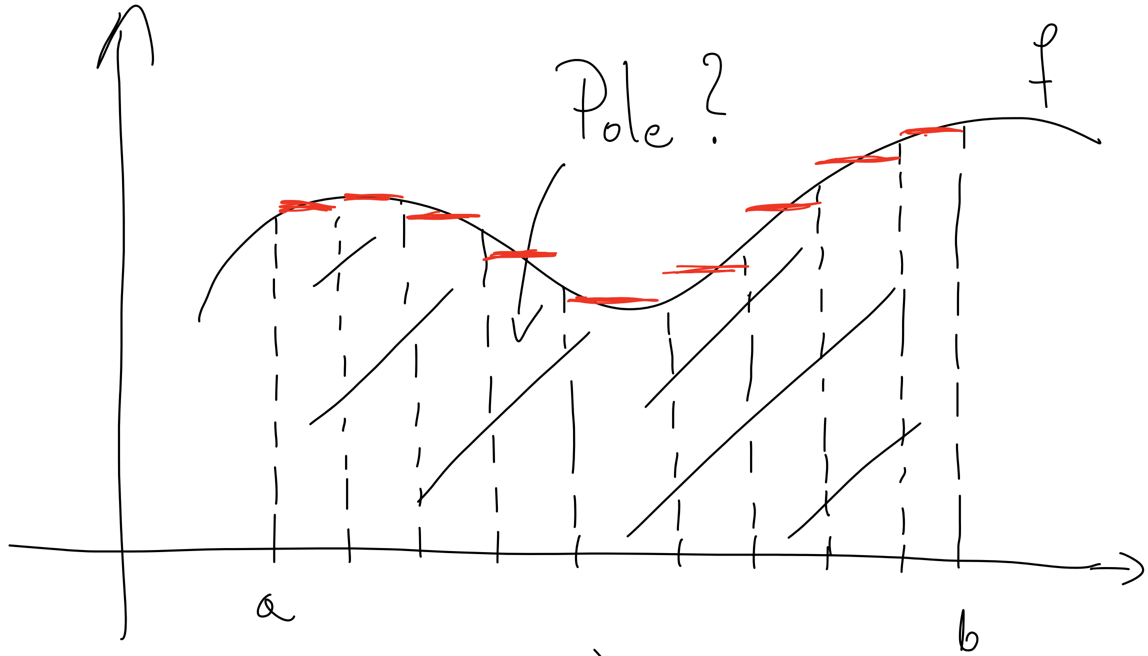


πr^2

$\text{Pole}_{\bigcirc} \cong \text{suma}\left(\triangle_{r\,\alpha\,r}\right)$

$\text{Pole}_{\bigcirc} \cong \text{suma}\left(\triangle_{r\,\cancel{\alpha}\,\alpha/2\,r}\right)$

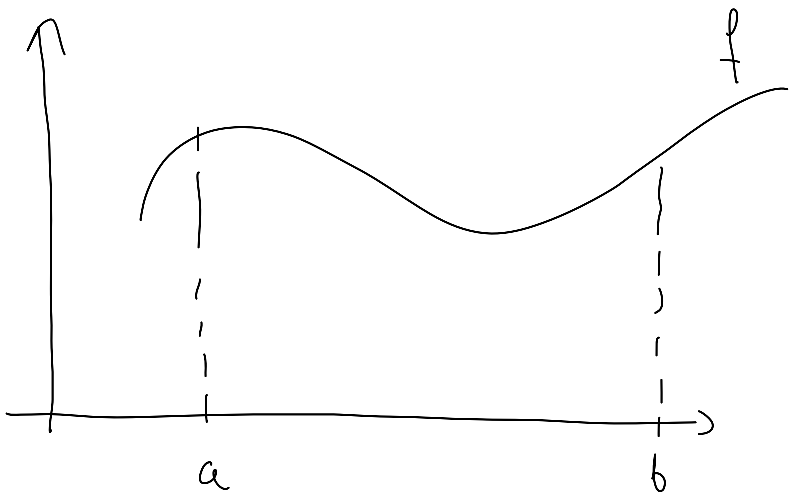




Pole $\cong$ suma $(\square)$

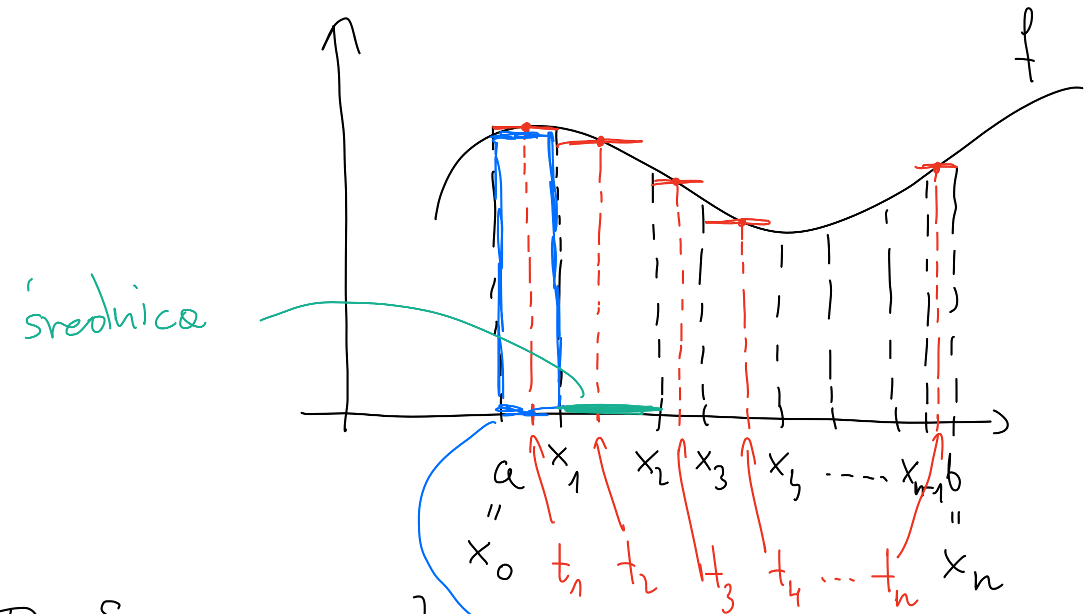
Całka oznaczona

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$



Całka oznaczona

$f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$



$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

$$S(f, P, T) = f(t_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(t_2)\cdot(x_2 - x_1) + \dots + f(t_n)\cdot(x_n - x_{n-1})$$

suma całkowa

$$S(f, P, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x_k} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k}$$

$P = \{x_0, \dots, x_n\}$, δ_P – średnica podziału

$$\delta_P = \max_{k=1,\dots,n} (x_k - x_{k-1}) = \max_{k=1,\dots,n} \Delta x_k$$

(P_m) – ciąg podziałów odcinka $\langle a, b \rangle$

(P_m) nazywamy ciągiem normalnym, jeżeli $\delta_{P_m} \xrightarrow{m \to +\infty} 0$.

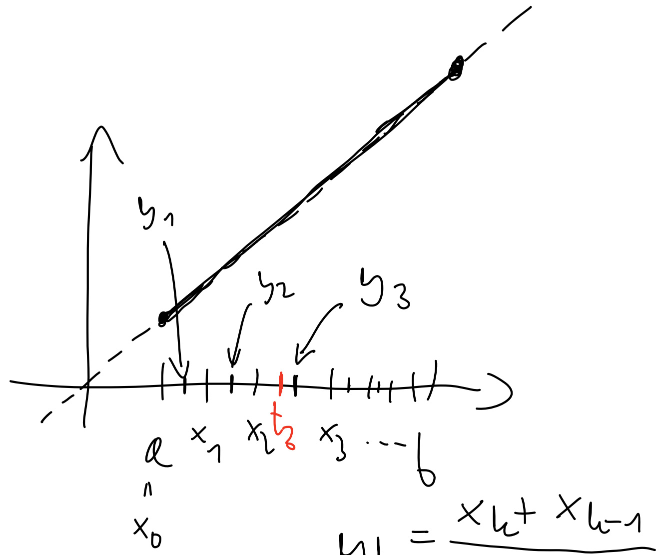
Def. (Całka oznaczona) Jeżeli dla dowolnego ciągu podziałów normalnych (P_n) i dowolnego ciągu (T_n) punktów pośrednich granica

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n, T_n)$$

istnieje, to nazywamy ją całką oznaczoną funkcji f po przedziale $\langle a, b\rangle$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

$$\int_a^b x\,dx = \ ? = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$



$$y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

$$f(x) = x$$

$$\boxed{S(x, P, T)} = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} t_k\,\Delta x_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (t_k - y_k)\,\Delta x_k}_{S_2} + \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n} y_k\,\Delta x_k}}_{S_1}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} y_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\cdot (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cancel{x_1^2} - x_0^2) + (\cancel{x_2^2} - \cancel{x_1^2}) + (\cancel{x_3^2} - \cancel{x_2^2}) + \ldots + (x_n^2 - \cancel{x_{n-1}^2})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n^2 - x_0^2\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)}$$

$$|S_2| = \left|\sum_{k=1}^{n} (t_k - y_k)\,\Delta x_k\right| = \left\{|x + y| \le |x| + |y|\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|t_k - y_k|}_{\le \frac{1}{2}\Delta x_k}\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\,\Delta x_k^2 \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot \delta_P =$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta_P \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{1}{2}\,\delta_P\,(b - a)$$

$S_2 \to 0$, gdy $\delta_P \to 0$.

Funkcja F jest **funkcją pierwotną** funkcji f na przedziale I, jeżeli

$$F'(x) = f(x)$$

dla każdego $x \in I$.

$$(-\cos x)' = \sin x$$

$$(-\cos x + 3)' = \sin x$$

Charakteryzacja funkcji pierwotnych

Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, to

$\rightsquigarrow$ $G = F + C$ jest funkcją pierwotną f dla dowolnej stałej C,

$\rightsquigarrow$ każda funkcja pierwotna funkcji f jest postaci $F + C$.

$G' = f \qquad F' = f$

$G' - F' = 0$

$(G-F)' = 0 \implies G - F$ jest f. stałą

$G = F + C$

Całka nieoznaczona

Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F + C \colon C \in \mathbb{R}\},$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Zbiór ten oznaczamy

$$\int f(x)\,dx.$$

$$\int \sin x\,dx = \{-\cos x + C : C \in \mathbb{R}\} =$$

$$= -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Własności

- $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x),$
- $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left, "(\ )'"] & f' \arrow[l, bend left, "\int"] \end{tikzcd}$$

Istnienie całki nieoznaczonej

Twierdzenie

Każda funkcja ciągła na przedziale I ma na tym przedziale funkcję pierwotną.

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int 0\,dx = C, \quad x \in \mathbb{R}$

$(C)' = 0$

- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1,$

$(x^a)' = ax^{a-1}$

- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ lub } x \in (0, \infty)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ $$\int \sin x \; dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \cos x \; dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\rightsquigarrow \quad \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \quad \displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arcctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \quad \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \quad x \in (-1,1)$

$\rightsquigarrow \quad \displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C, \quad x \in (-1,1)$

Przydatne wzory

- $$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \text{ dla } a \neq 0 \text{ i } b \in \mathbb{R},$$
- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C,$$
- $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{1}{f(x)} + C,}$$
- $$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

$$\left(-\frac{1}{f(x)} + C\right)' = -\left(\frac{1}{f(x)}\right)' + (C)' = -\left(\left(f(x)\right)^{-1}\right)' =$$

$$= -\frac{-1}{(f(x))^2} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Twierdzenie o liniowości całki nieoznaczonej

Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

1. $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
2. $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

$$\int f(x)g(x)\,dx \cancel{=} \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

$$\int \left(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\right)dx = f(x)g(x)$$

$$\int \underbrace{\overset{f}{x}\,\overset{g'}{\sin x}}\,dx = \int \overset{f}{x}\,(-\overset{g}{\cos x})'\,dx = -x\cos x - \int (x)'(-\cos x)dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= \underbrace{-x\cos x + \sin x + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\left(-x\cos x + \sin x\right)' = \cancel{-1\cdot\cos x} + (-x)\cdot(-\sin x) + \cancel{\cos x} =$$

$$= x\sin x.$$

Przykład

$$\int \ln x\,dx = \int \underset{g}{(x)'}\,\underset{f}{\ln x}\,dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx =$$

$$= x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx =$$

$$= x\ln x - x + C$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Jeżeli

1. funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale (a, b),
2. funkcja $g : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ ma ciągłą pochodną na przedziale (α, β),

to

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f oraz $C \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2)'}{1+x^4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2)'}{1+(x^2)^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x^2 \quad | \,()' \\ 1dt = 2x\,dx \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}$$

$$= \operatorname{arctg}(t) + C = \operatorname{arctg}(x^2) + C$$

Przykład

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \int e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}\,dx = \left|\begin{aligned} t &= \frac{1}{x} \\ dt &= -\frac{1}{x^2}\,dx \\ -dt &= \frac{1}{x^2}\,dx \end{aligned}\right| =$$

$$= \int e^{t} \cdot (-1)\,dt = -\int e^{t}\,dt = -e^{t} + C =$$

$$= -e^{1/x} + C,$$

$$C \in \mathbb{R}.$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

$$\int \frac{A}{x+a}dx$$

$$\int \frac{A}{(x+a)^n}dx$$

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Całkowanie funkcji wymiernych

Przykład

Uniwersalne podstawienie trygonometryczne

- Jeżeli $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, to

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Całki z funkcji niewymiernych

Całka oznaczona

Całka oznaczona

Wzór Newtona-Leibniza

Twierdzenie

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $\langle a, b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$\int_a^b x\,dx \qquad f(x) = x \qquad F(x) = ?$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

Przykład

Interpretacja geometryczna

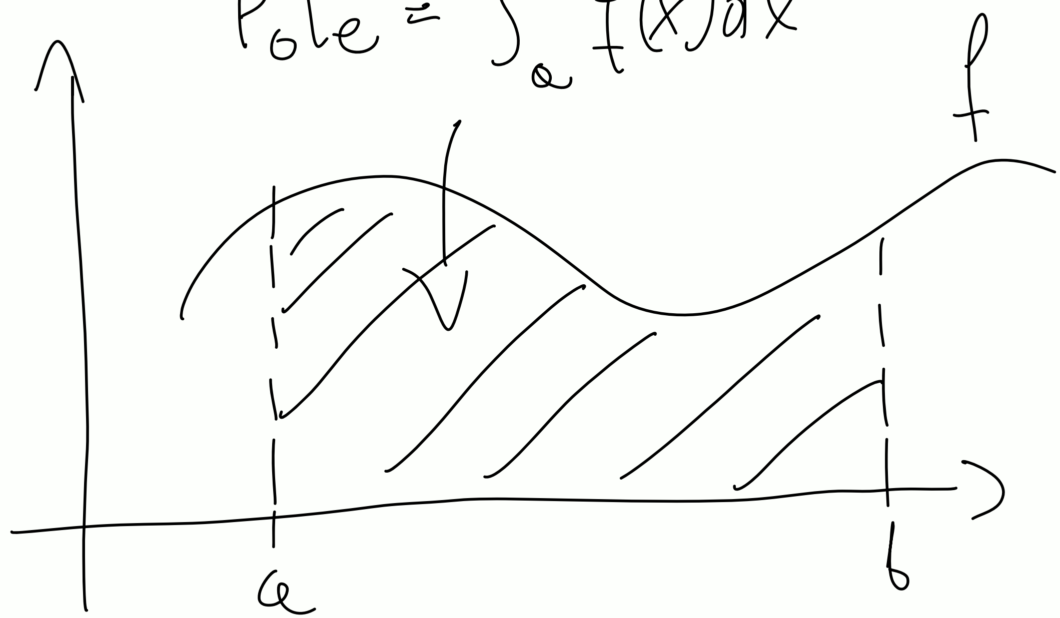
Jeżeli funkcja f jest nieujemna na przedziale $\langle a, b \rangle$, to całka oznaczona

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

jest **polem** obszaru ograniczonego następującymi krzywymi:

- osią Ox,
- wykresem funkcji f,
- prostą $x = a$,
- prostą $x = b$.

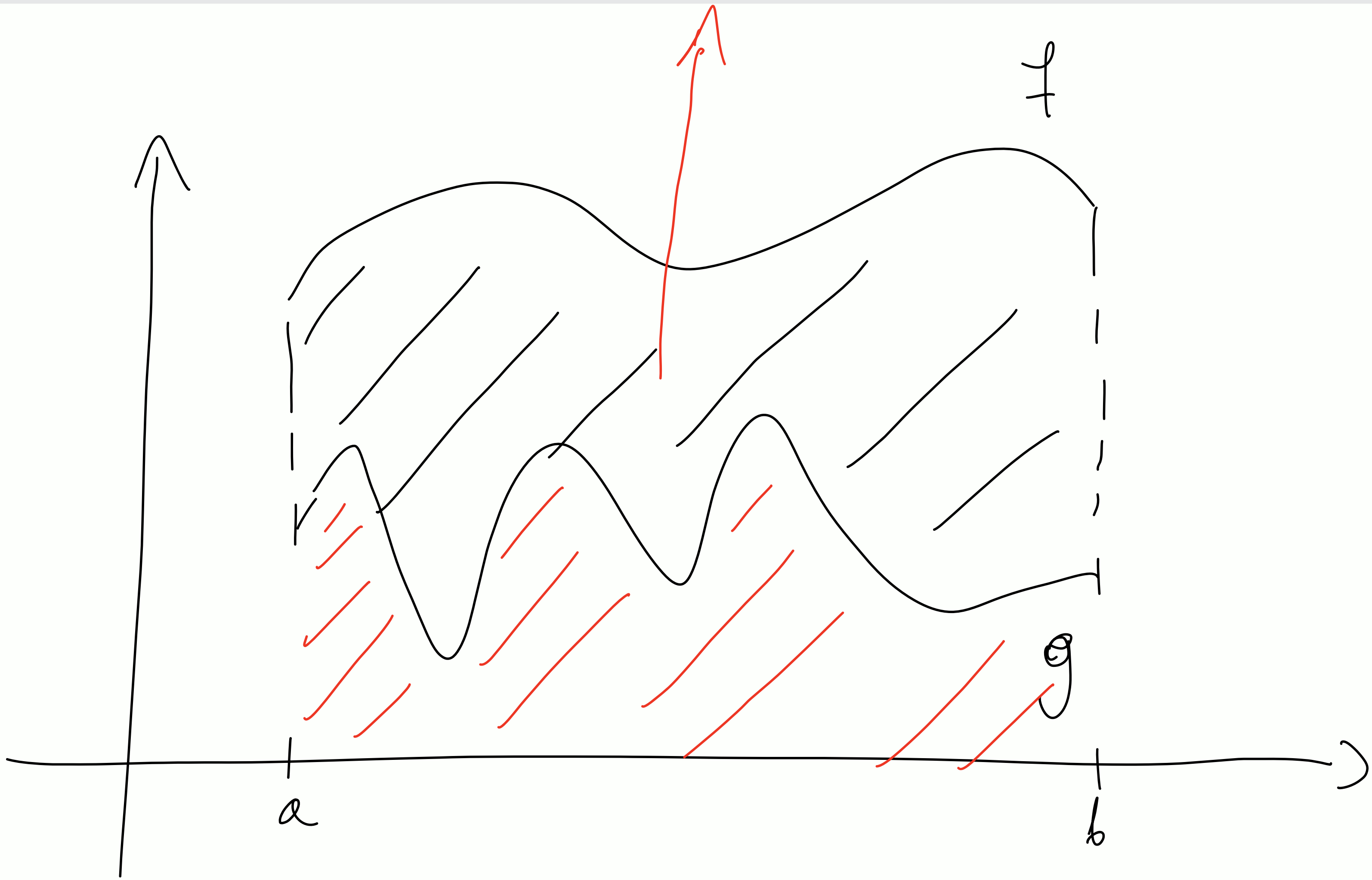
$$\text{Pole} = \int_a^b f(x)dx$$



Uwaga

Jeżeli $f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in \langle a, b\rangle$, to pole obszaru zawartego między wykresami funkcji f i g na przedziale $\langle a, b\rangle$ jest równe

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Własności całki oznaczonej

- $\rightsquigarrow$ $$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$
- $\rightsquigarrow$ $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$
- $\rightsquigarrow$ $$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \text{ dla dowolnego } c \neq 0,$$
- $\rightsquigarrow$ $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
- $\rightsquigarrow$ $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \text{ dla } b \in \langle a, c\rangle.$$

Całkowanie przez części

Jeżeli funkcje f, g są różniczkowalne na przedziale $\langle a, b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Całkowanie przez podstawienie

Załóżmy, że funkcja f jest określona na przedziale $\langle a, b \rangle$, a funkcja $\phi\colon \langle \alpha, \beta \rangle \to \langle a, b \rangle$ ma ciągłą pochodną oraz spełnia warunki

- $\phi(\alpha) = a$,
- $\phi(\beta) = b$.

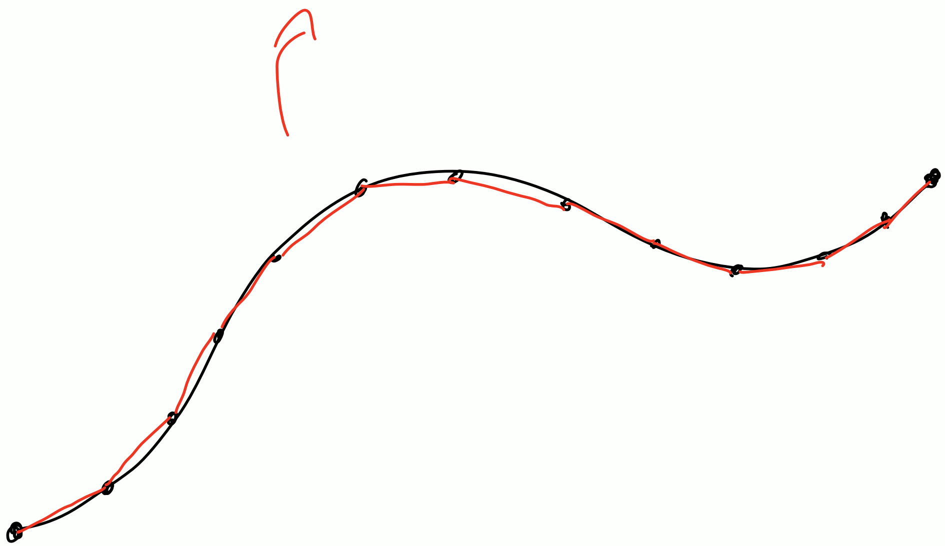
Wtedy

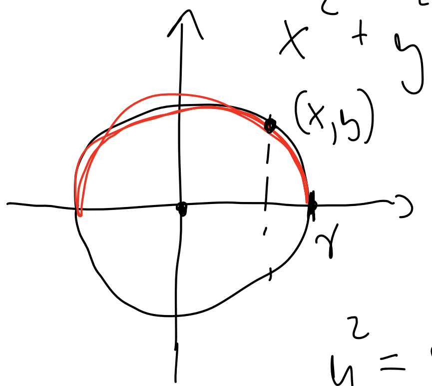
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,dx.$$

Zastosowania

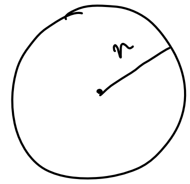
Załóżmy, że funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $\langle a, b \rangle$.
Długość krzywej $y = f(x)$ dla $x \in \langle a, b \rangle$ jest równa

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$





$x^2 + y^2 = r^2$

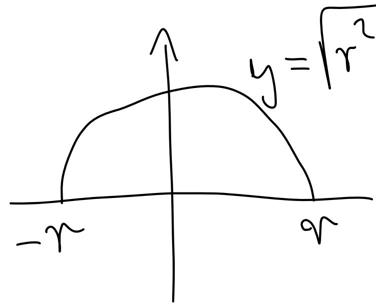


Obvod ?

$y^2 = r^2 - x^2$

$y \geq 0$, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$



$$\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)'\right)^2}\, dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot 2x\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_{-r}^{2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \boxed{r \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx}$$

$$= r \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_{-r}^{r} = r\left[\arcsin\left(\frac{r}{r}\right) - \arcsin\left(\frac{-r}{r}\right)\right] =$$

$$= r\left[\underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}}\right] = r\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \boxed{\pi r}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = rt \\ dx = r\,dt \end{array} \right| =$$

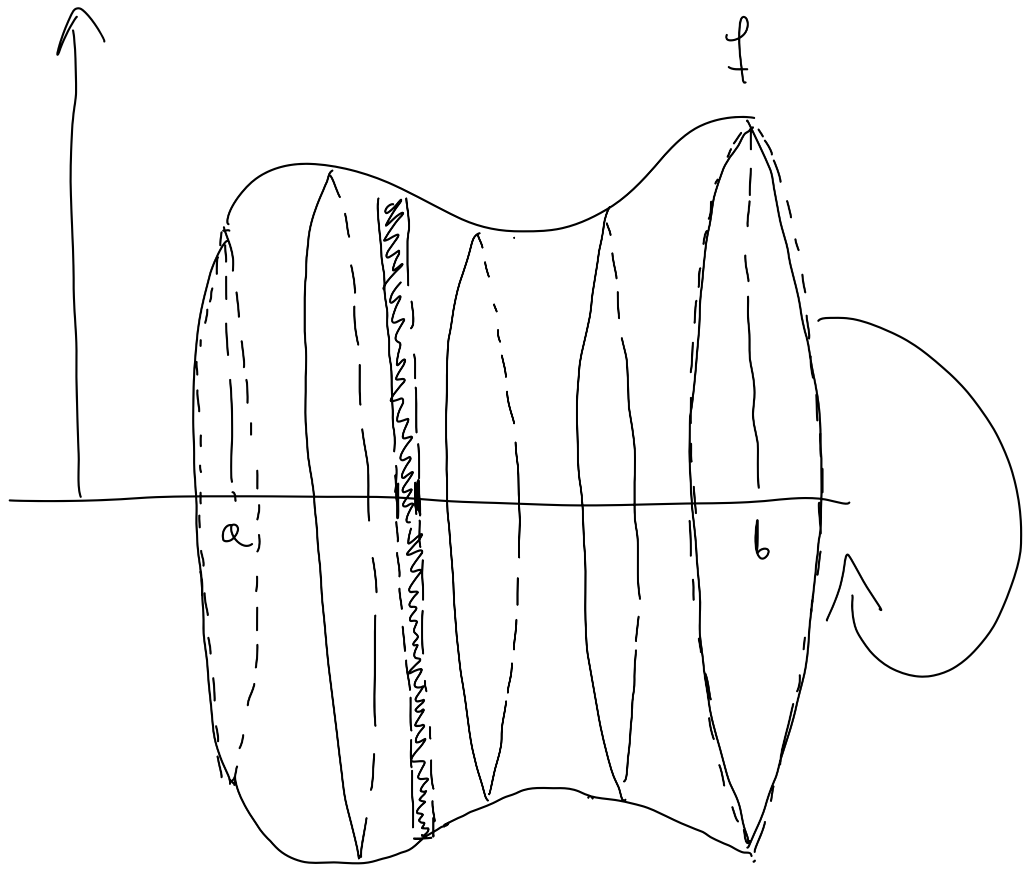
$$= \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - r^2 t^2}}\, r\,dt = \int \frac{r}{\sqrt{r^2(1-t^2)}}\, dt = \int \frac{\cancel{r}}{\cancel{r}\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= \arcsin(t) + C = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + C$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$$



f
a
b

Zastosowania

Pole powierzchni bryły powstałej przez obrót krzywej

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle$$

wokół osi Ox jest równe

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

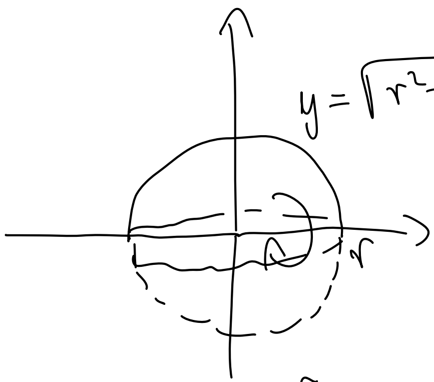
Zastosowania

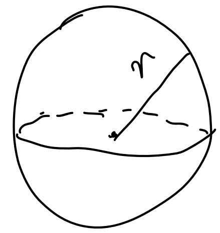
Objętość bryły powstałej przez obrót obszaru „pod krzywą”

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle$$

wokół osi Ox jest równa

$$|V_x| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$





$$V_{kuli} = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{r} = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 - \frac{-r^3}{3} \right) \right] =$$

$$= \boxed{\pi \frac{4}{3} r^3}$$

$$\int (r^2 - x^2)\, dx = \int r^2 dx - \int x^2 dx = r^2 x - \frac{x^3}{3} + C$$

Zastosowania

Objętość bryły powstałej przez obrót obszaru „pod krzywą"

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle$$

wokół osi Oy jest równa

$$|V_y| = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Przykłady

- Wyprowadzić wzór na pole koła.
- Wyprowadzić wzór na objętość stożka i kuli.