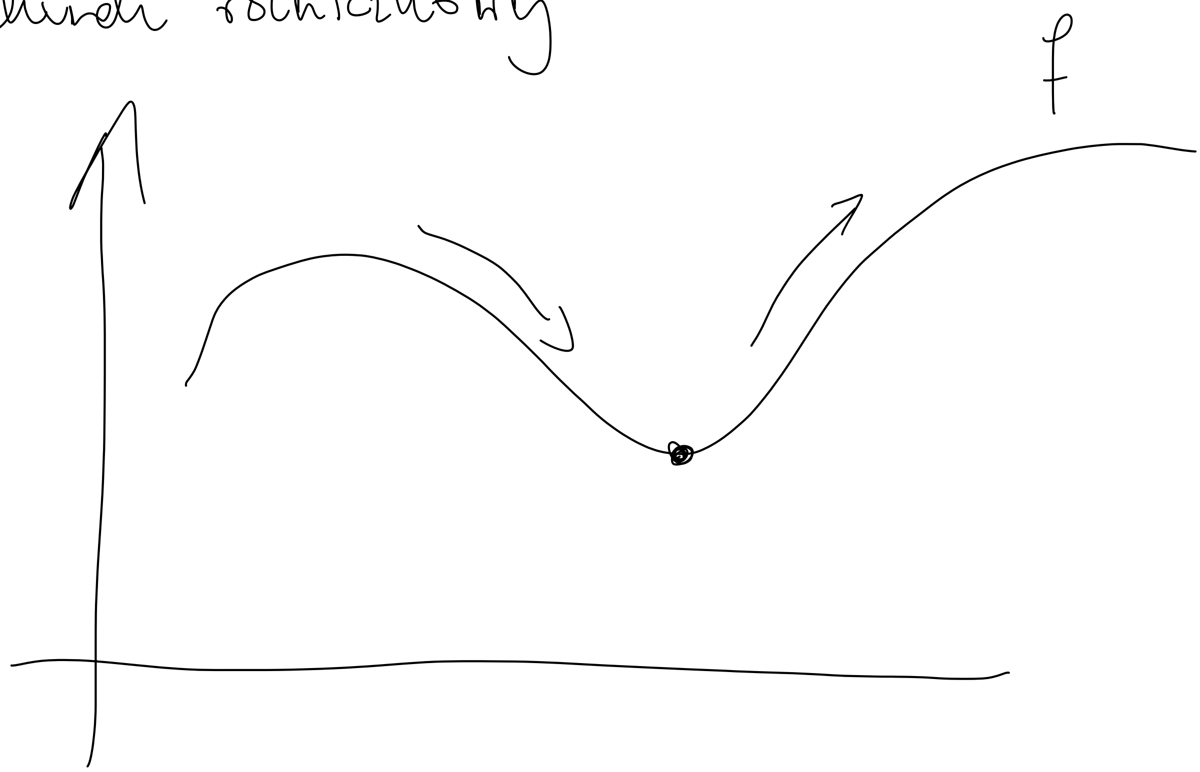
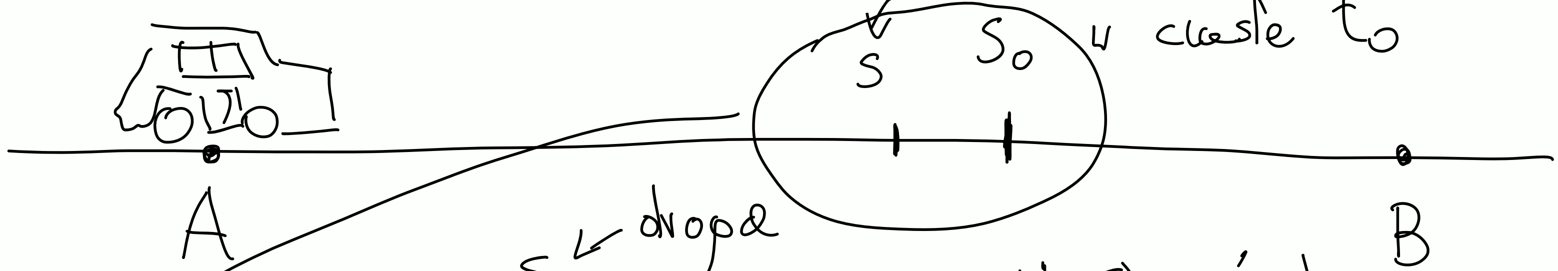
Rachunek różniczkowy



Intuicja fizyczna i geometryczna

$t \to$ w czasie t

w czasie t_0



$$v_{śr} = \frac{s}{t}$$

droga

czas

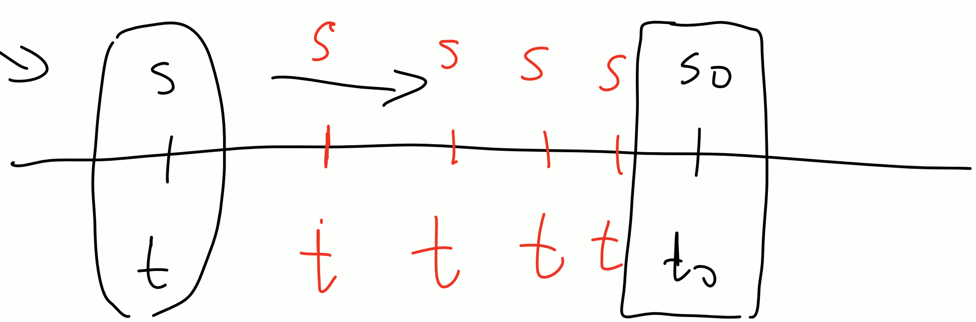
prędkość

← prędkość średnia

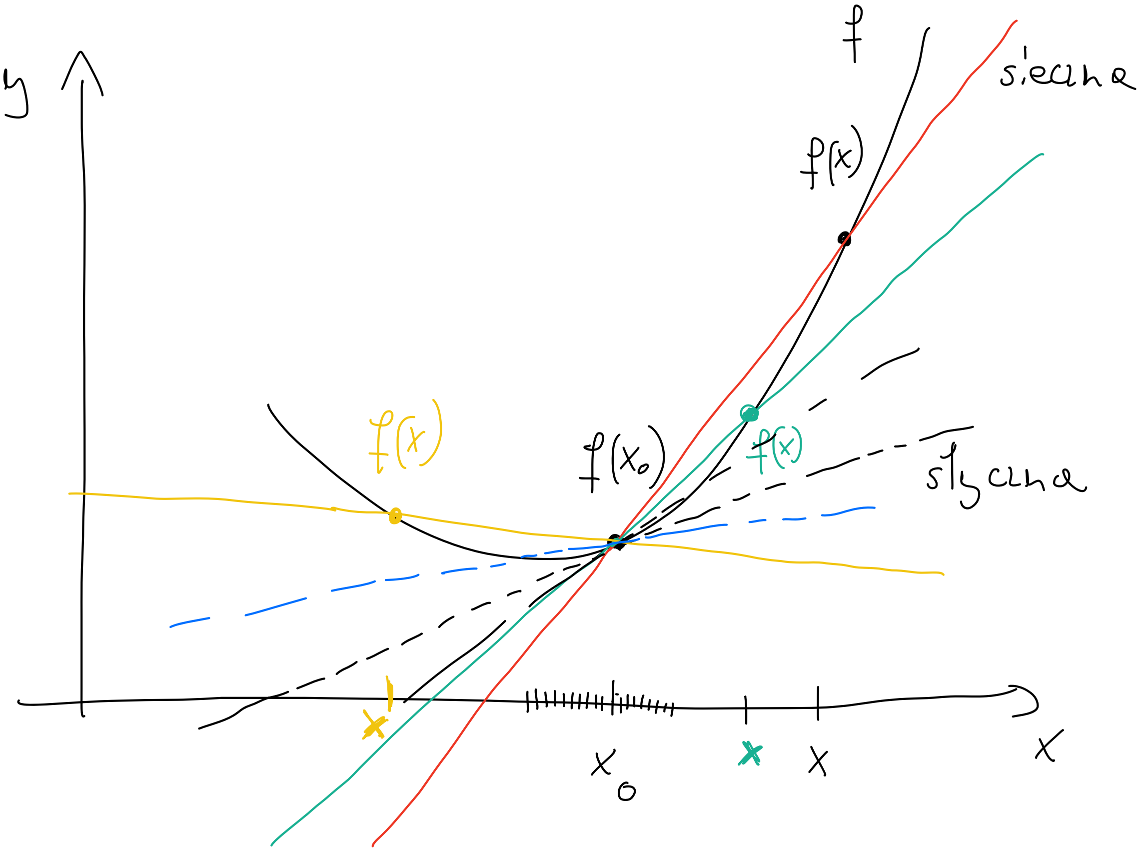
$$v = \frac{\text{długość drogi}}{\text{łączny czas}}$$

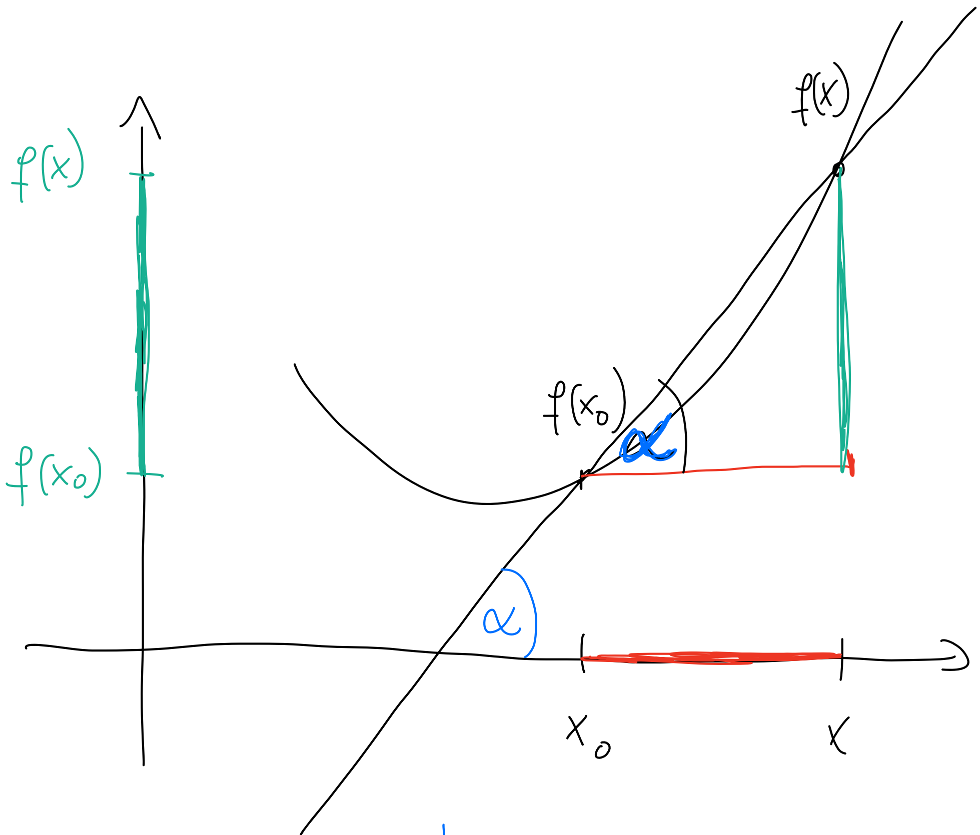
$v_{chwilowa}$

$v_{śr}$ na odcinku od s do s_0 $= \dfrac{s_0 - s}{t_0 - t}$



$v_{chwilowa}$ w s_0 $= \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s_0 - s}{t_0 - t}$





tg α – wsp. kierunkowy siecznej

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{długość}(\,|\,)}{\text{długość}(\,-\,)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{?}{\rightsquigarrow} \text{wsp. kierunkowy stycznej}$$

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ oraz $x, x_0 \in (a, b)$. Liczbę

$$\boxed{x \neq x_0 \quad !}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu $x - x_0$.

Pochodna funkcji

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a,b)$. Jeżeli istnieje (właściwa) granica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji** f w punkcie x_0 i oznaczamy

$$f'(x_0).$$

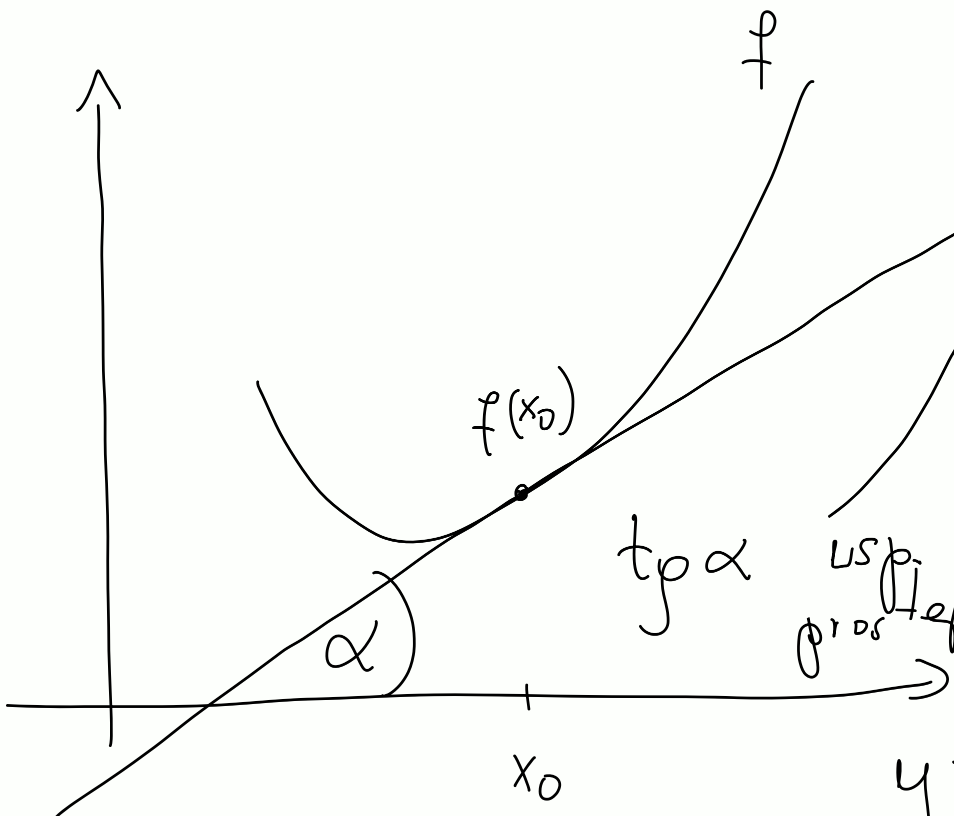
Mówimy wtedy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0.

Interpretacja geometryczna

Jeżeli $f'(x_0)$ istnieje, to prostą o równaniu

$$\underline{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

nazywamy **styczną** do wykresu funkcji f w punkcie x_0.



tg α wsp. kier. prostej y

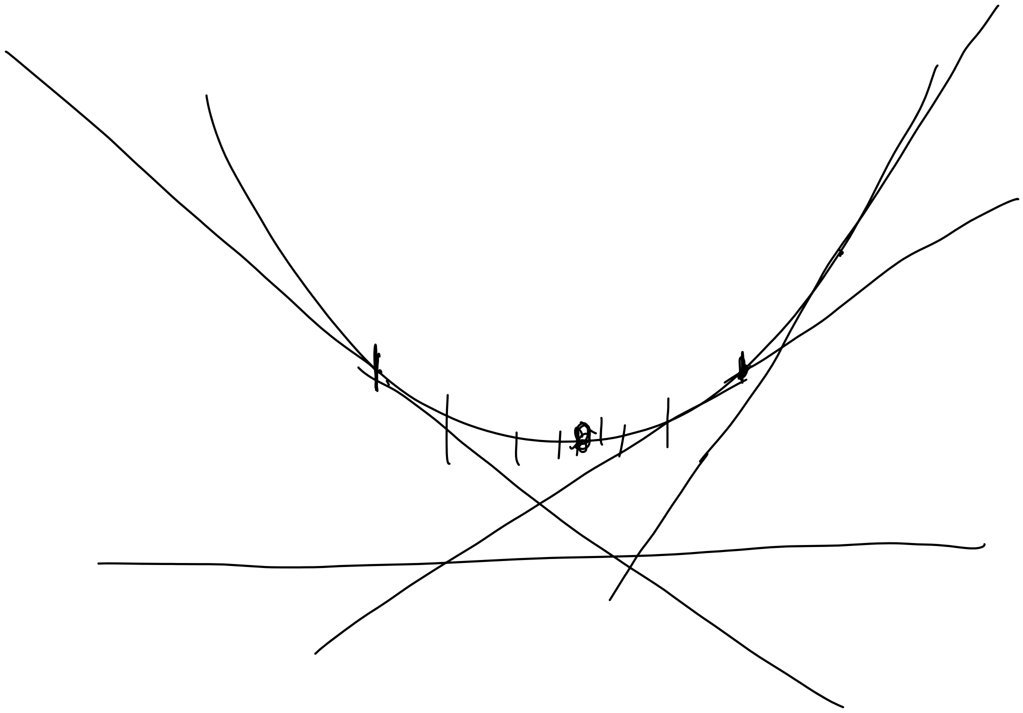
$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} ax_0 + b = f(x_0) \\ a = f'(x_0) \end{cases}$$

$$b = f(x_0) - ax_0$$

$$= f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

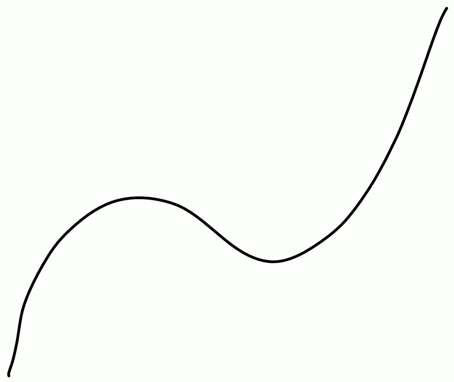
$$y = \underline{f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0}$$

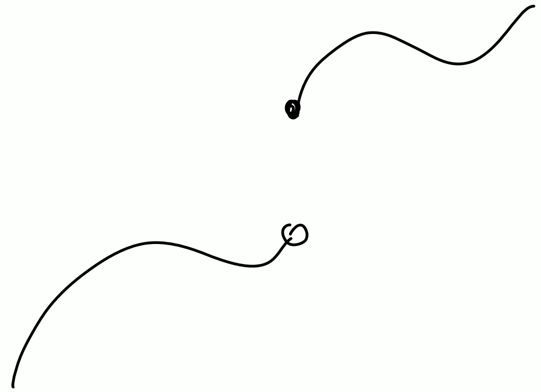


Związek z ciągłością

Twierdzenie

Funkcja różniczkowalna w punkcie jest w tym punkcie ciągła.





Oznaczenia

$$\underline{f'(x_0)} \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \dot{f}(x_0) \qquad Df(x_0)$$

Przykład

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

$$\underline{f'(x_0) = 2x_0}$$

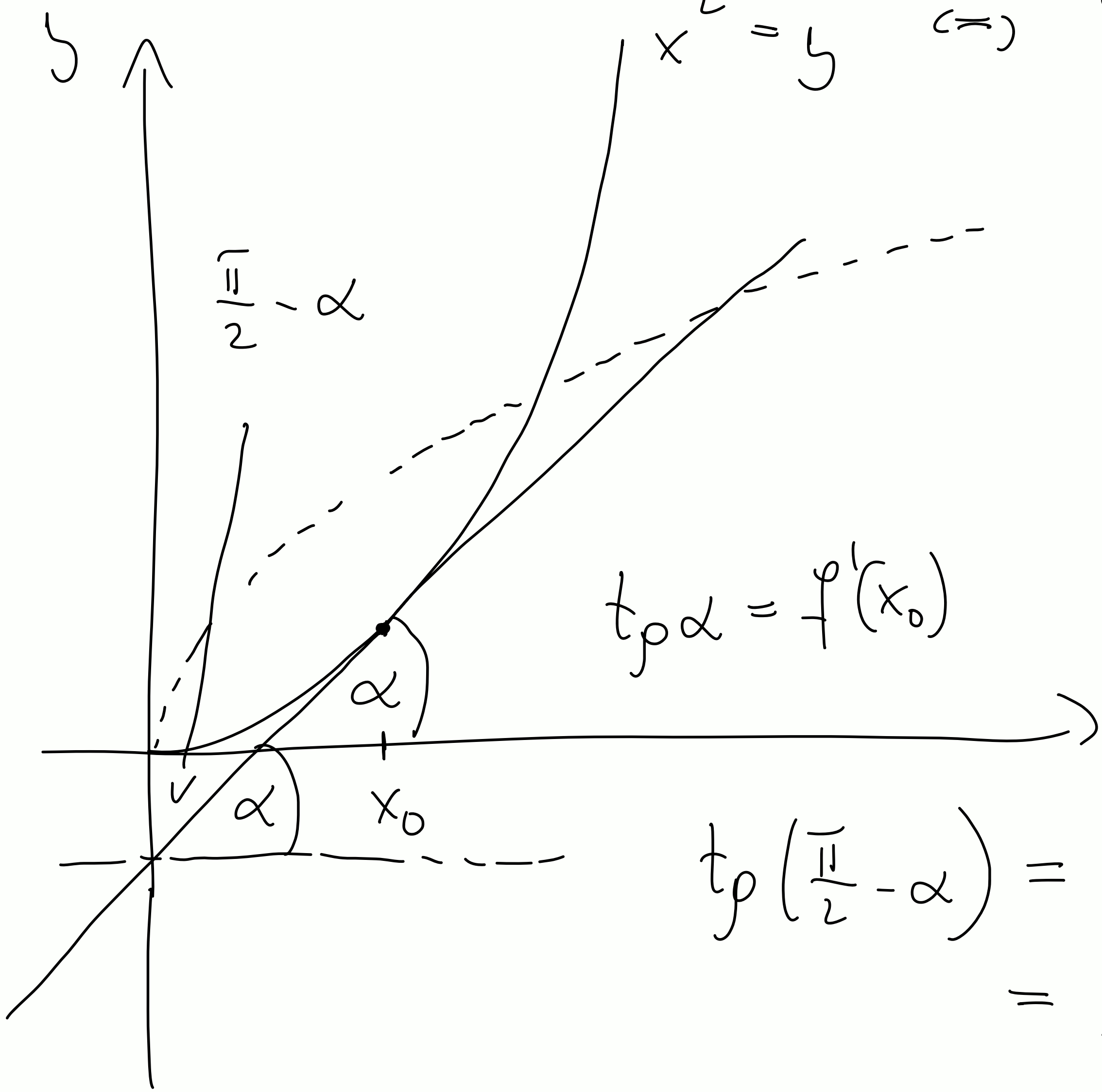
$$\Downarrow$$

$$(x^2)' = 2x$$

Przykład

Pochodna funkcji odwrotnej

$$x^2 = y \iff x = \sqrt{y}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ściśle monotoniczna oraz $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Przykład

Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja g ma pochodną w punkcie x_0, a funkcja f ma pochodną w punkcie $g(x_0)$, to

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).$$

$$(f \circ g)(x) = \underline{f(g(x))}$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin(x^2))' = \sin'(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Przykład

Pochodne funkcji elementarnych

- $(c)' = 0$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ $\quad a \in \mathbb{R}$
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Pochodne funkcji elementarnych

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Pochodne funkcji elementarnych

- $\leadsto$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\leadsto$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\leadsto$ $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $\leadsto$ $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Algebraiczne własności pochodnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $\rightsquigarrow$ $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,
- $\rightsquigarrow$ $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $\rightsquigarrow$ $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,
- $\rightsquigarrow$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$.

1) pochodne f. elementarnych
2) pochodna f. złożonej
3)

Przykład

$$f(x) = \ln(\cos(x)) \cdot \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \left[\ln(\cos(x))\right]' \cdot \sqrt{x} + \ln(\cos(x)) \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= \left[\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)\right] \cdot \sqrt{x} + \ln(\cos(x)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

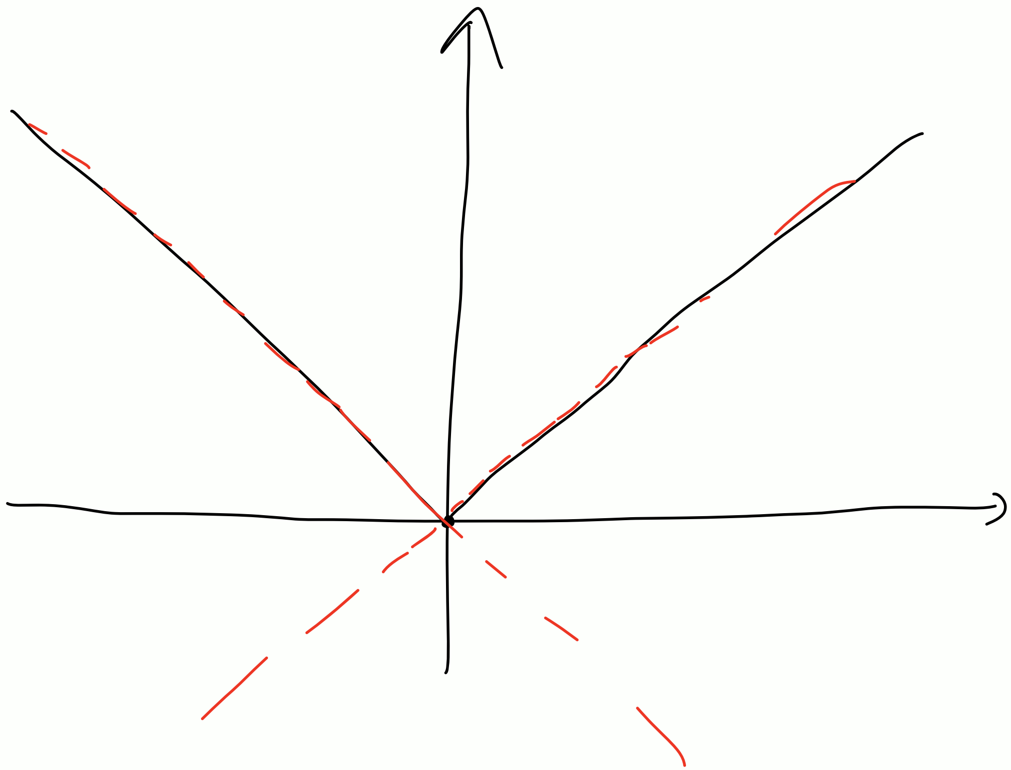
$$(x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Pochodna logarytmiczna

Ciągłość nie implikuje różniczkowalności

$f(x) = |x|$

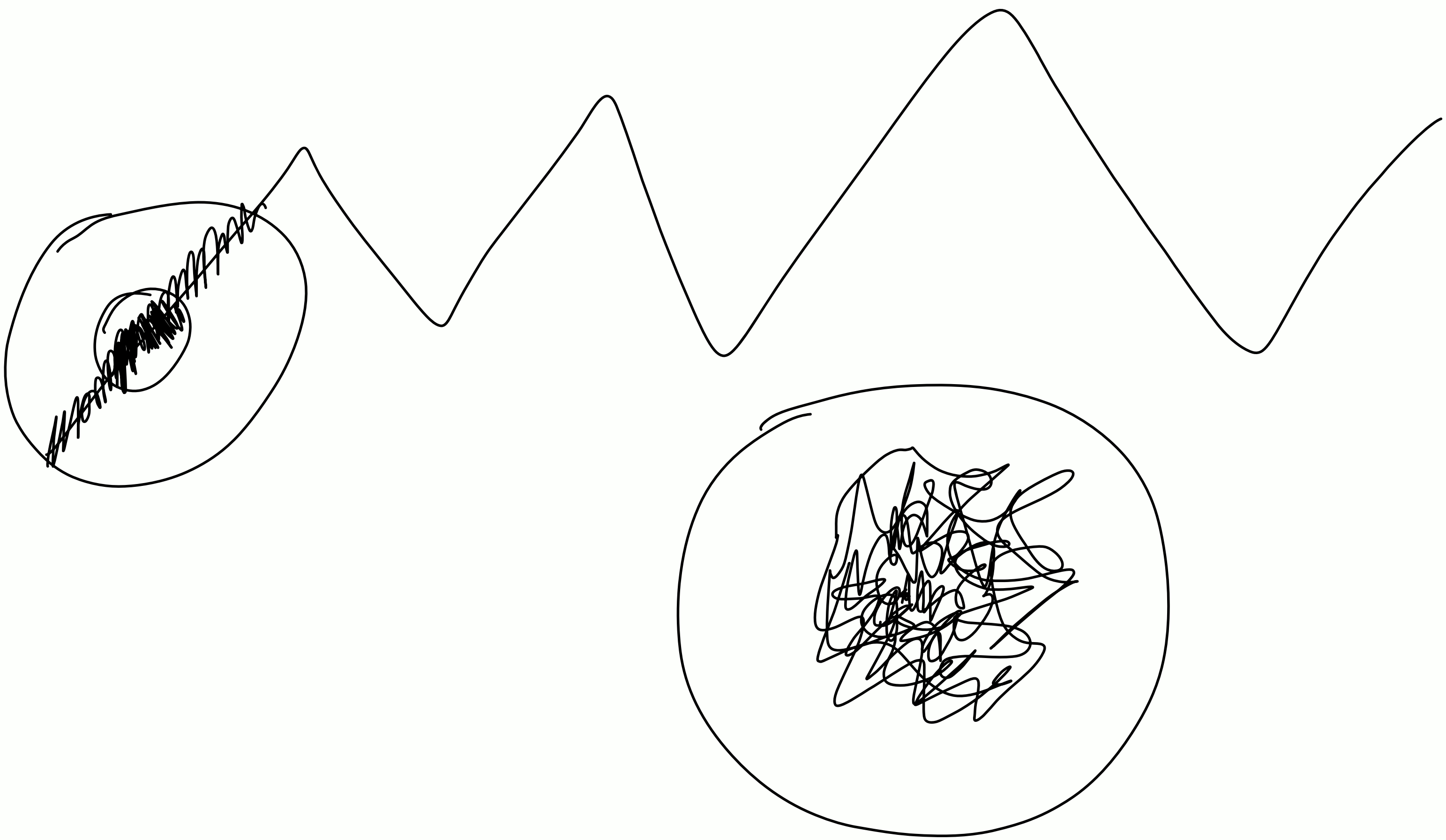


$f'(0)$ nie istnieje

Ciągłość nie implikuje różniczkowalności

Twierdzenie

Istnieją funkcje ciągłe na $\mathbb{R}$, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie.



Pochodne jednostronne

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0.

Pochodne jednostronne

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0.

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną prawostronną** funkcji f w punkcie x_0.

Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $\langle a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a.

Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $\langle a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a.

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $(a, b\rangle$ i ma pochodną lewostronną w b, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w b.

Pochodne wyższych rzędów

$$f \longrightarrow f'$$

$$x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$f \qquad f'$$

$$(2x)' = 2\cdot(x)' = 2$$

$$(f')' = f''$$

$$(x^2)'' = 2$$

$$f \to f' \to f'' \to f''' \to \ldots \to f^{(n)} \to \ldots$$

Pochodne wyższych rzędów

Określoną indukcyjnie liczbę

$$f^{(n)}(x_0) = \begin{cases} f(x_0), & n = 0, \\ \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0), & n \geqslant 1, \end{cases}$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną n-tego rzędu** funkcji f w punkcie x_0.

Pochodna n-tego rzędu iloczynu

Wzór Leibniza

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne n-tego rzędu w punkcie x_0, to

$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)\cdot g^{(k)}(x_0)$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

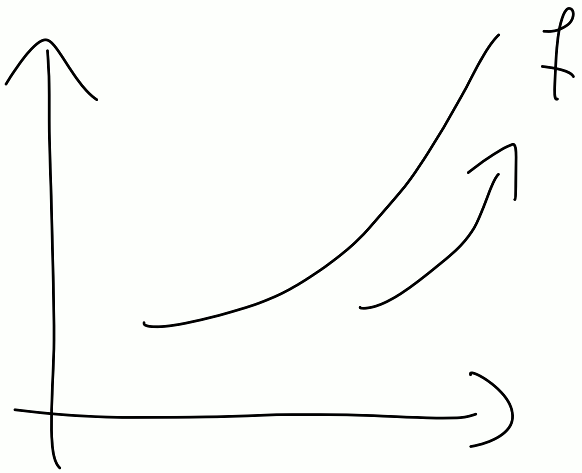
$$(xe^x)^{(3)}=\binom{3}{0}x'''(e^x)^{(0)}+\binom{3}{1}x''(e^x)'+\binom{3}{2}x'(e^x)''+\binom{3}{3}x^{(0)}(e^x)^{(3)}$$

$$=0\cdot e^x+0\cdot e^x+3e^x+xe^x=$$

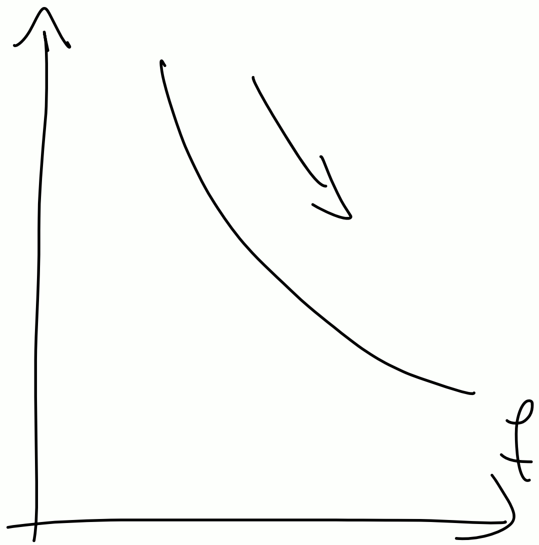
$$=e^x(3+x)$$

Pochodna a monotoniczność

$f' > 0 \Rightarrow$



$f' < 0 \Rightarrow$



Pochodna a monotoniczność

Niech funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I. Wtedy:

- f jest stała na $I \iff f' = 0$ wewnątrz I.
- f jest rosnącą na $I \iff f' \geqslant 0$ wewnątrz I.
- f jest malejąca na $I \iff f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

niemalejąca

nierosnąca

Pochodna a monotoniczność

Niech funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I. Wtedy:

$\rightsquigarrow$ f jest stała na $I \iff f' = 0$ wewnątrz I.

$\rightsquigarrow$ f jest rosnącą na $I \iff f' \geqslant 0$ wewnątrz I.

$\rightsquigarrow$ f jest malejąca na $I \iff f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

Jeżeli ponadto funkcja f' nie jest stale równa 0 na żadnym podprzedziale przedziału I, to

$\rightsquigarrow$ f jest **ściśle** rosnącą na $I \iff f' \geqslant 0$ wewnątrz I.

$\rightsquigarrow$ f jest **ściśle** malejąca na $I \iff f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

Wzór Taylora

$\sqrt{2}$ $\quad 2^{3/4}$ $\quad \sin(1{,}5)$ $\quad ?$

x^n $\quad W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$\sqrt{x}$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^n \quad + \text{reszta}$$

Wzór Taylora

Załóżmy, że $I = \langle a, b\rangle$ jest przedziałem domkniętym oraz $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Jeżeli dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$ funkcja f ma

$\rightsquigarrow$ ciągłą pochodną rzędu $n-1$ na przedziale I,

$\rightsquigarrow$ pochodną rzędu n na przedziale (a, b),

to istnieje taki punkt c, leżący między x a x_0, że

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{wielomian Taylora}} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{reszta}}.$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Przykład

$\sqrt{3.96}$ $\quad f(x) = \sqrt{x} \quad f(3.96) = ? \quad f(4) = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \qquad f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-3/2} = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} = \frac{3}{8} x^{-5/2}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

$x = 3.96, \quad x_0 = 4$

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2}(4)^{-1/2}(x-4) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(4)^{-3/2}(x-4)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot(4)^{-5/2}\cdot(x-4)^3$$

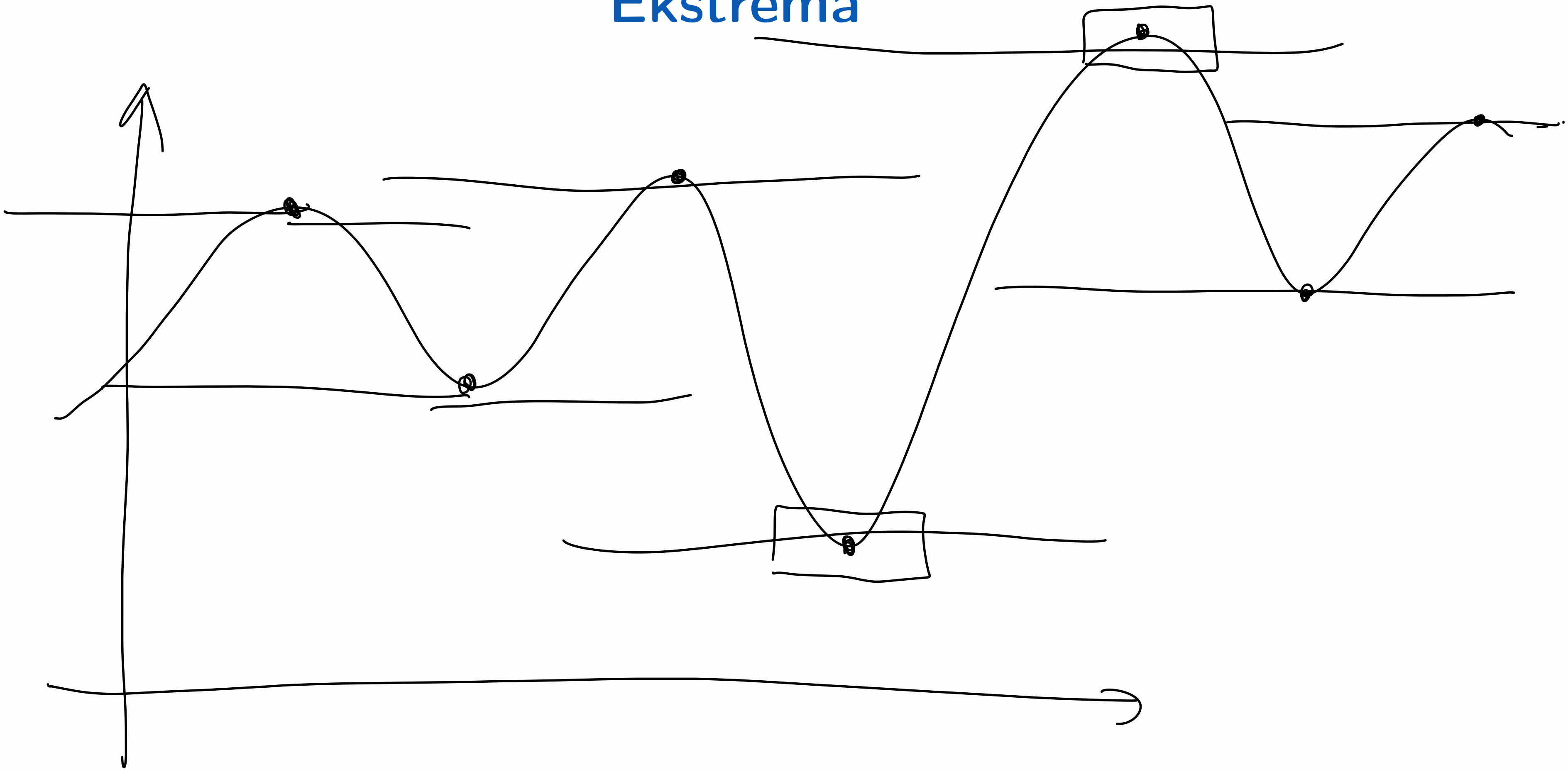
$$\sqrt{3.96} \approx 2 + \frac{1}{\cancel{4}_1}\cdot\frac{-\cancel{4}^1}{100} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{-4}{100}\right)^2 + \ldots$$

$$2 - \frac{1}{100} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(100)^2} = 1.99 - \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 0.0001}_{0.000025}$$

$$= 1.99 - 0.000025 =$$

$$= \boxed{1.\boxed{989975}} \qquad \sqrt{3.96} = 1.98997487\ldots$$

Ekstrema



Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum lokalne**, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in S(x_0,\delta)} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Jeżeli nierówność $\geqslant$ zamienimy na $>$, to powiemy, że jest to **minimum lokalne właściwe**.

Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in S(x_0,\delta)} f(x) \leqslant f(x_0).$$

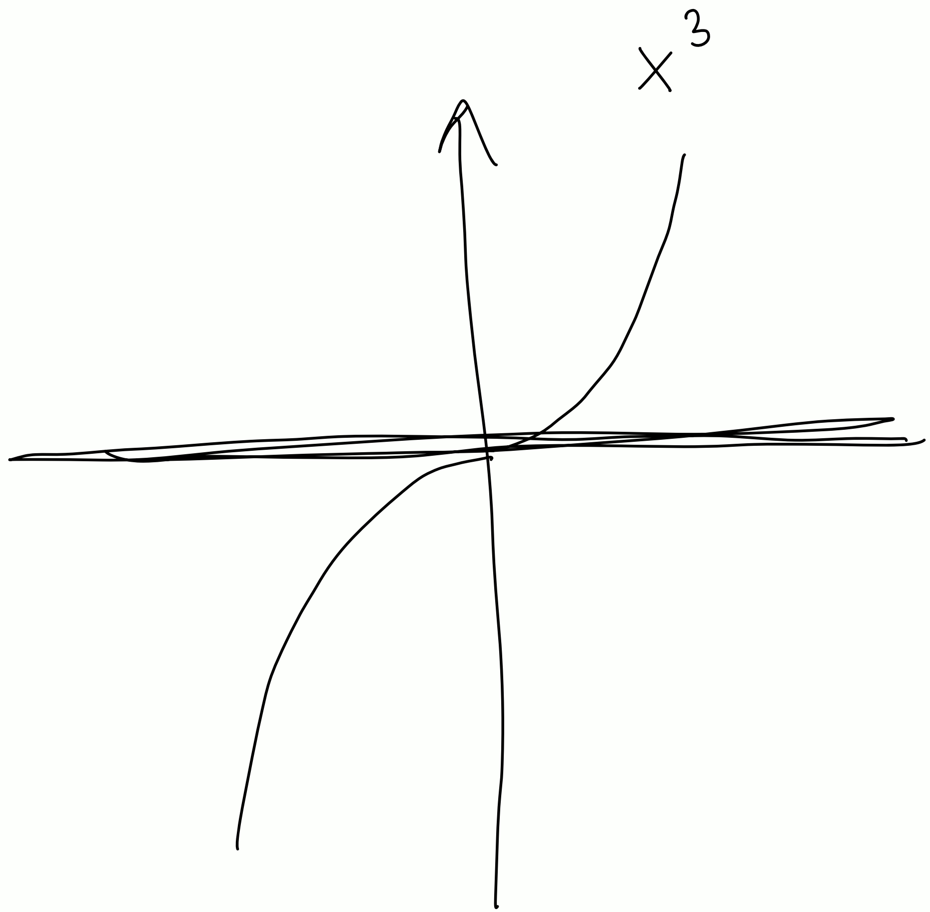
Jeżeli nierówność $\leqslant$ zamienimy na $<$, to powiemy, że jest to **maksimum lokalne właściwe**.

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Twierdzenie Fermata

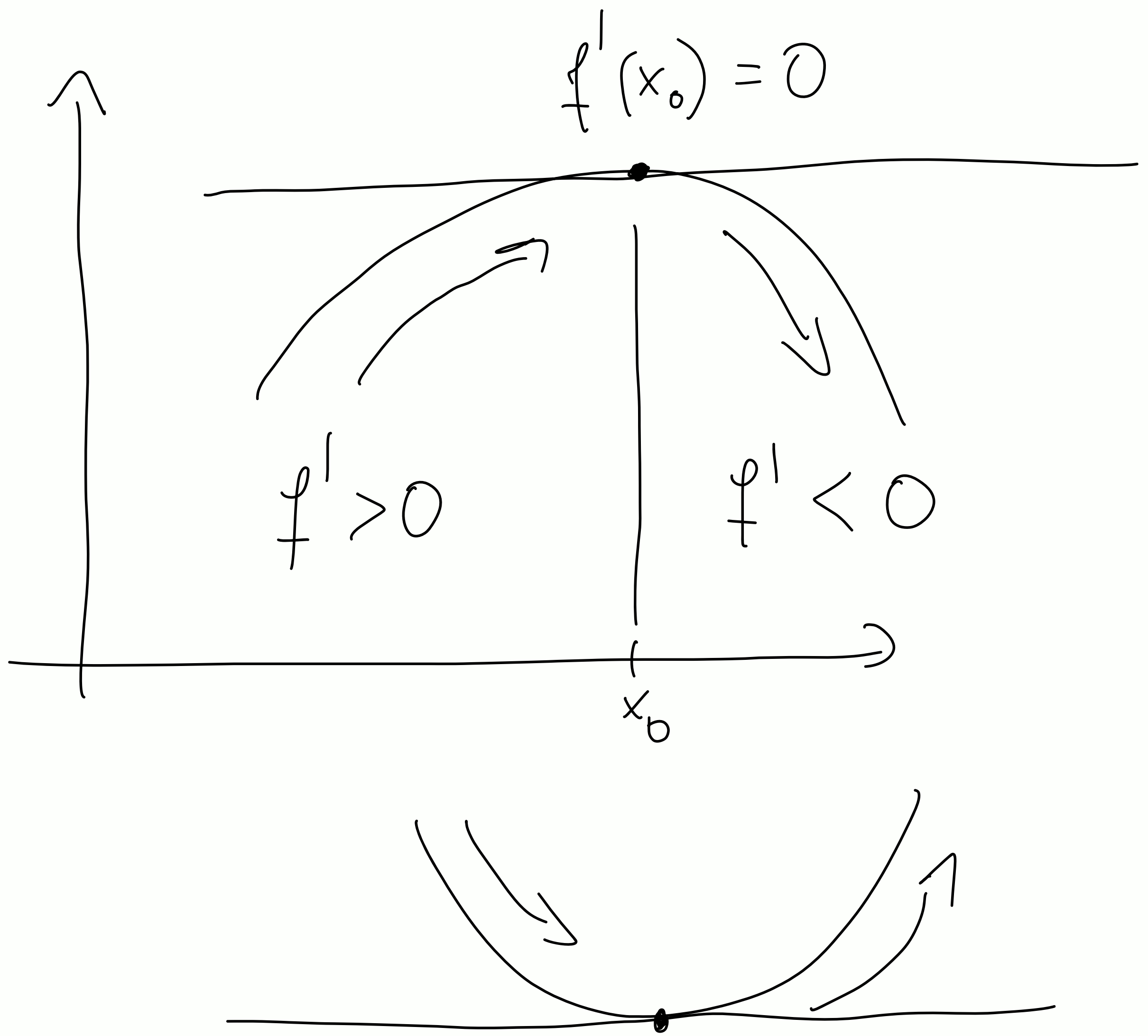
Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$f'(x_0) = 0.$$



$$(x^3)' = 3x^2$$

Warunek dostateczny istnienia ekstremum



Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Niech funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie **ciągła** w punkcie x_0 oraz dla pewnego $\delta > 0$ **różniczkowalna** w zbiorze $S(x_0, \delta)$.

- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe.
- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodną f' oraz istnieje druga pochodna $f''(x_0)$.

Jeżeli

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f''(x_0) \neq 0,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f''(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f''(x_0) > 0$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodne do rzędu $n-1$, a pochodna $f^{(n)}(x_0)$ istnieje.

Jeżeli

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

i n jest liczbą **parzystą**, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Jeżeli liczba n jest nieparzysta, to funkcja nie posiada ekstremum w punkcie x_0.

Przykład

$$f(x) = x\ln x, \quad D = (0, +\infty)$$

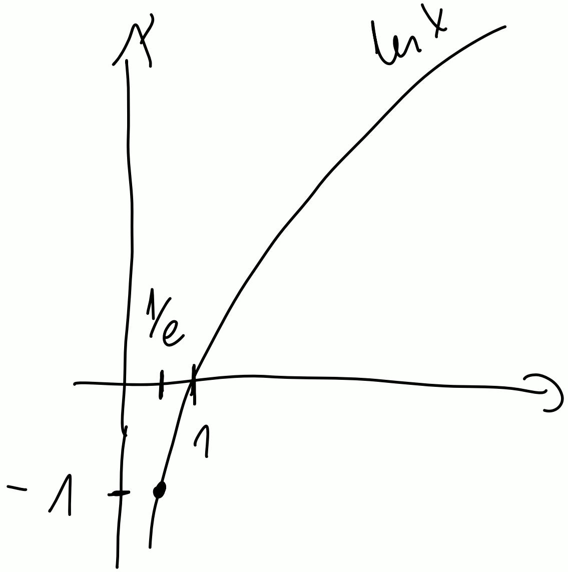
$$f'(x) = (x)'\cdot \ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \underline{\ln x + 1}$$

$$f'(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1$$

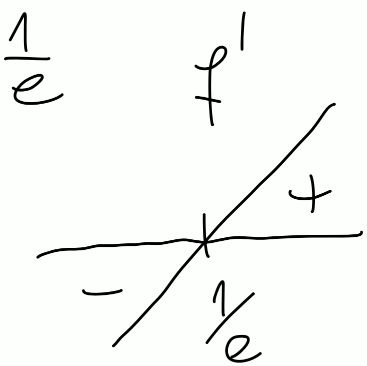
$$\iff x = e^{-1} \iff x = \frac{1}{e}$$

$f'(x) = \ln x + 1 < 0$ dla $x < \frac{1}{e}$

$f'(x) = \ln x + 1 > 0$ dla $x > \frac{1}{e}$



x	$(0, 1/e)$	$1/e$	$(1/e, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	minimum lokalne	$\nearrow$



$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\cdot\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\cdot(-1) = \frac{-1}{e}$$

Ekstrema globalne

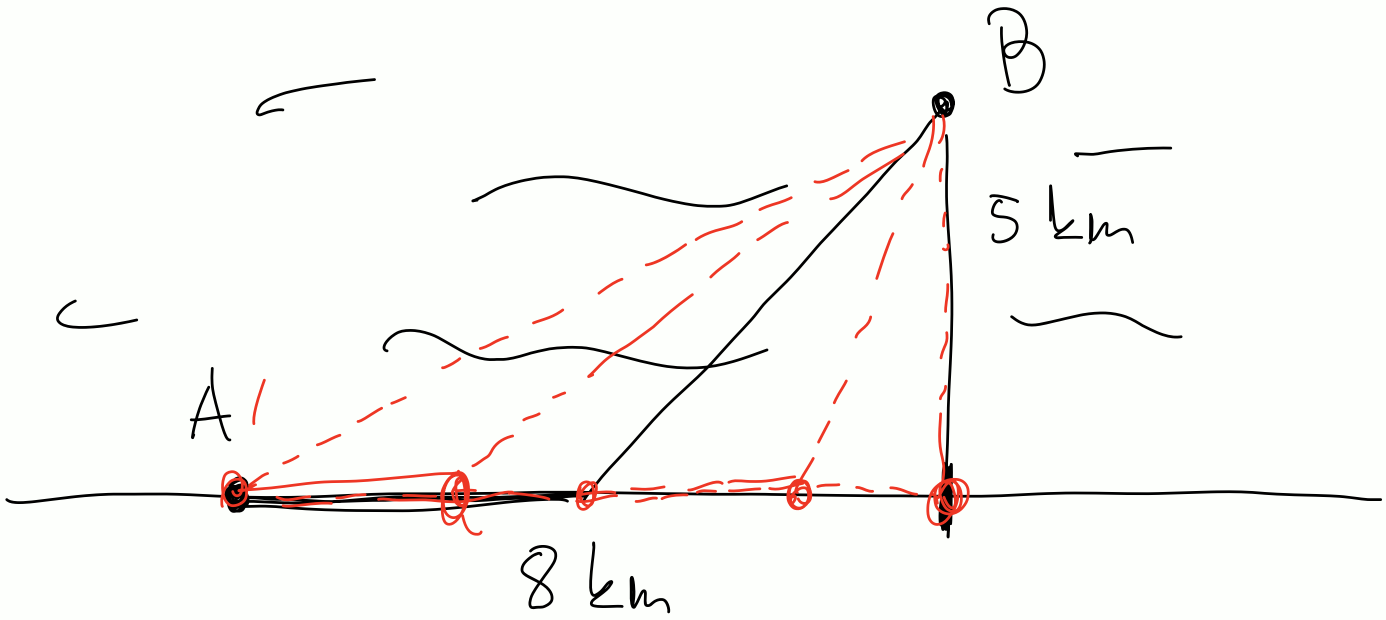
Przykład

Przykład

Prostopadłościenne pudełko mające w podstawie kwadrat, ma mieć objętość 2000 cm^3. Materiał na dno kosztuje 30 zł za cm^2, zaś na ściany boczne jest o połowę tańszy. Jakie powinny być wymiary pudełka, aby koszt zużytego materiału był minimalny?

Przykład

Firma wydobywająca ropę naftową musi ułożyć rurociąg z punktu A leżącego przy brzegu do platformy wiertniczej znajdującej się na morzu w punkcie B. Koszt ułożenia 1 km rurociągu wzdłuż brzegu wynosi \$500 000, natomiast na dnie morza \$1 000 000. Jaki jest najmniejszy możliwy koszt ułożenia takiego rurociągu?



Reguła de l'Hospitala

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0),
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Reguła de l'Hospitala

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Reguła de l'Hospitala: uwagi

- $\rightsquigarrow$ Obie reguły de l'Hospitala są prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w $+\infty$ lub w $-\infty$.
- $\rightsquigarrow$ Reguły de l'Hospitala można również wykorzystywać do obliczania granic typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0.