Zintegrowany Program Rozwoju Politechniki Lubelskiej - część druga

POLITECHNIKA LUBELSKA
WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI

KIERUNEK STUDIÓW
INFORMATYKA

MATERIAŁY DO ZAJĘĆ

Matematyka dla informatyków I

Autor:
dr Adam Gregosiewicz

Lublin 2020

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

INFORMACJA O PRZEDMIOCIE

Cele przedmiotu:

- Cel 1. Zapoznanie studentów z podstawowymi pojęciami i twierdzeniami rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej.
- Cel 2. Zapoznanie studentów z podstawowymi pojęciami i twierdzeniami algebry liniowej i geometrii analitycznej.

Efekty kształcenia w zakresie umiejętności:

- Efekt 1. Potrafi posługiwać się podstawowymi definicjami i metodami rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej.
- Efekt 2. Potrafi posługiwać się podstawowymi pojęciami i modelami z algebry liniowej i geometrii analitycznej.

Literatura do zajęć:

Literatura podstawowa

a) Leitner R., Zarys matematyki wyższej, część I i II, Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa, 2019,

b) Krysicki W., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, Cześć I, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2015,

c) Kajetanowicz P., Wierzejewski J., Algebra z geometrią analityczną, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2008,

d) Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2009.

Literatura uzupełniająca

a) Stankiewicz W., Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, część A i B, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2001.

Metody i kryteria oceny:

- Oceny cząstkowe:
  - Ocena 1. Odpowiedzi ustne.
  - Ocena 2. Wyniki uzyskane z dwóch kolokwiów.
- Ocena końcowa – zaliczenie przedmiotu:
  - Uzyskanie minimum 51% punktów możliwych do zdobycia z dwóch kolokwiów oraz odpowiedzi ustnych.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Plan zajęć:

Ćw. 1.	Obliczanie pochodnych funkcji jednej zmiennej.
Ćw. 2.	Zastosowanie rachunku różniczkowego do obliczania wartości przybliżonych oraz granic funkcji.
Ćw. 3.	Badanie monotoniczności i wyznaczanie ekstremów funkcji jednej zmiennej z wykorzystaniem rachunku różniczkowego.
Ćw. 4.	Obliczanie całek nieoznaczonych z zastosowaniem wybranych metod całkowania.
Ćw. 5.	Obliczanie i zastosowanie całek oznaczonych i niewłaściwych.
Ćw. 6.	Kolokwium 1.
Ćw. 7.	Zamiana postaci liczby zespolonej. Działania na liczbach zespolonych.
Ćw. 8.	Wykonywanie działań na macierzach. Obliczanie wyznaczników.
Ćw. 9.	Wyznaczanie macierzy odwrotnej oraz rzędu macierzy.
Ćw. 10.	Rozwiązywanie układów równań liniowych.
Ćw. 11.	Działania na wektorach.
Ćw. 12.	Wyznaczanie równań prostych i płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$.
Ćw. 13.	Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem przekształceń geometrycznych.
Ćw. 14.	Badanie własności krzywych stożkowych.
Ćw. 15.	Kolokwium 2.

Spis treści

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

ĆWICZENIA 1. Obliczanie pochodnych funkcji jednej zmiennej.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności różniczkowania funkcji jednej zmiennej.

Zakres tematyczny zajęć:

- Definicja pochodnej funkcji w punkcie.
- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji.
- Pochodna funkcji złożonej.
- Pochodna funkcji odwrotnej.

Pytania kontrolne:

a) Jaka jest definicja pochodnej?

b) Jaki jest wzór na pochodną sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji?

c) Jaki jest wzór na pochodną funkcji złożonej?

d) Jaki jest wzór na pochodną funkcji odwrotnej?

Zadanie 1.1. Obliczyć z definicji pochodną funkcji f w podanym punkcie x_0:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$,

b) $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$,

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$,

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = -1$,

e) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$,

f) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$,

g) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$,

h) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x_0 = 1$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Pochodna $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jest zdefiniowana jako granica ilorazu różnicowego, to znaczy

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

o ile ta granica istnieje. W naszym przypadku, dla $f(x) = x^2$ i $x_0 = 1$, musimy sprawdzić, czy istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}.$$

Ze wzoru na różnicę kwadratów mamy jednak

$$\frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

Granicą ostatniego wyrażenia przy h dążącym do zera jest 2, więc pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 1$ istnieje i

$$f'(1) = 2.$$

h) Musimy sprawdzić, czy przy $h \to 0$ istnieje granica wyrażenia

$$\frac{\mathrm{e}^{1+h} - \mathrm{e}^1}{h} = \mathrm{e}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}.$$

Ponieważ e jest stałą, to skupimy się na badaniu wyrażenia $(\mathrm{e}^h - 1)/h$. Stosując podstawienie

$$t = \mathrm{e}^h - 1,$$

możemy zapisać $\mathrm{e}^h = 1 + t$, skąd $h = \ln(1+t)$ (zwróćmy uwagę, że $t > -1$). Oznacza to, że

$$\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \frac{t}{\ln(1+t)}.$$

Ponieważ $h \to 0$ jest równoważne $t \to 0$, to

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{t^{-1}\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}}.$$

Wiemy jednak, że

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e,$$

więc na mocy ciągłości funkcji logarytm otrzymujemy

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}} = \frac{1}{\ln e} = 1,$$

co dowodzi, że

$$f'(1) = e.$$

Wskazówki:
b) i d) Wykorzystać wzór na różnicę sześcianów.
e) i f) Wykorzystać wzory na różnice funkcji trygonometrycznych.

Zadanie 1.2. Obliczyć, wykorzystując wzory na pochodną sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu, pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = x^5 + 3x^3 - 5x^2 - 8x + 6$,

b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$,

c) $f(x) = \frac{x^5}{x^3 - 1}$,

d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$,

e) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$,

f) $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$,

g) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$,

h) $f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$,

i) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$,

j) $f(x) = x \arcsin x$,

k) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$,

l) $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$,

m) $f(x) = x \sin x \operatorname{arc\,tg} x$,

n) $f(x) = \frac{\arcsin x}{x}$,

o) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} x$,

p) $f(x) = x^2 \ln x$,

q) $f(x) = \sin x \log_3(x)$,

r) $f(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2^x}$,

s) $f(x) = e^x x^5$.

Przykładowe rozwiązania:

i) Wykorzystując wzór na pochodną ilorazu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)' = \\ &= \frac{(x\sin x)'(1+\operatorname{tg} x) - x\sin x(1+\operatorname{tg} x)'}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \\ &= \frac{\Big[(x)'\sin x + x(\sin x)'\Big](1+\operatorname{tg} x) - x\sin x\Big[(1)' + (\operatorname{tg} x)'\Big]}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \\ &= \frac{(\sin x + x\cos x)(1+\operatorname{tg} x) - x\sin x\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\operatorname{tg} x)^2}. \end{aligned}$$

m) Wielokrotnie stosując wzór na pochodną iloczynu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x\sin x \operatorname{arc\,tg} x)' = \\ &= [(x\sin x)\operatorname{arc\,tg} x]' = \\ &= (x\sin x)'\operatorname{arc\,tg} x + (x\sin x)(\operatorname{arc\,tg} x)' = \\ &= (\sin x + x\cos x)\operatorname{arc\,tg} x + x\sin x\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Zadanie 1.3. Obliczyć, wykorzystując wzór na pochodną funkcji złożonej, pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = \cos(x^2)$,

b) $f(x) = \sin^3 x$,

c) $f(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$,

d) $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x$,

e) $f(x) = \sin\sqrt{1+x^2}$,

f) $f(x) = (\arcsin x)^2$,

g) $f(x) = (\arcsin x + \arccos x)^2$,

h) $f(x) = \arcsin\frac{1}{x}$,

i) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

j) $f(x) = \ln^2 x$,

k) $f(x) = \sqrt{\ln x}$,

l) $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$,

m) $f(x) = \sqrt{1+\ln(x^2)}$,

n) $f(x) = x5^{-x}$,

o) $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}$,

p) $f(x) = 2^{\frac{x}{\ln x}}$,

q) $f(x) = \sqrt{1+\mathrm{e}^{3x}}$,

r) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2/\operatorname{tg} x}$,

s) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x^2+x}{2}$,

t) $f(x) = \sqrt{1+\operatorname{ctg} x}$,

u) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x^2$,

v) $f(x) = \ln \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1+x^2}$,

w) $f(x) = \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\right)^2$,

x) $f(x) = \arcsin^2 \ln(x^2 + x^3)$,

y) $f(x) = \ln \sin \sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{x^3}}$,

z) $f(x) = \ln \ln \ln x$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Funkcję f można zapisać jako złożenie funkcji elementarnych w następujący sposób

$$f = f_1 \circ f_2,$$

gdzie

$$f_1(x) = x^3,$$
$$f_2(x) = \sin x.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej otrzymujemy

$$f'(x) = (f_1 \circ f_2)'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x).$$

Ponieważ

$$f_1'(x) = 3x^2, \qquad f_2'(x) = \cos x,$$

to

$$f'(x) = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x.$$

e) Mamy

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3,$$

gdzie

$$f_1(x) = \sin x,$$
$$f_2(x) = \sqrt{x},$$
$$f_3(x) = 1 + x^2.$$

Wykorzystując wzory

$$f_1'(x) = \cos x, \qquad f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f_3'(x) = 2x,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_1 \circ f_2 \circ f_3)'(x) = \\ &= f_1'(f_2 \circ f_3(x)) \cdot (f_2 \circ f_3)'(x) = \\ &= f_1'(f_2 \circ f_3(x)) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x) = \\ &= \cos \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x. \end{aligned}$$

y) Mamy

$$f'(x) = \frac{1}{\sin \sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{x^3}}} \cdot \cos \sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{x^3}} \cdot \frac{1}{3} (\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{x^3})^{-2/3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\mathrm{e}^{x^3}\right)^2} \cdot \mathrm{e}^{x^3} \cdot 3x^2.$$

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 1.4. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^x$,

b) $f(x) = x^{x^2}$,

c) $f(x) = x^{1/x}$,

d) $f(x) = x^{x^x}$,

e) $f(x) = x^{\sin x}$,

f) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$,

g) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$,

h) $f(x) = (\ln x)^x$,

i) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Ponieważ funkcja wykładnicza oraz logarytmiczna są względem siebie odwrotne, to dla dowolnego $a > 0$ mamy

$$a = \mathrm{e}^{\ln a}.$$

Wstawiając $a = x^x$ (zakładamy tutaj, że $x > 0$), otrzymujemy

$$x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}.$$

Wynika stąd, że

$$(x^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = \mathrm{e}^{x \ln x}(\ln x + 1).$$

Zadanie 1.5. Wykorzystując wzór na pochodną funkcji odwrotnej, wyznaczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x > 0$,

b) $f(x) = \ln x$ dla $x > 0$,

c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Funkcją odwrotną do funkcji f jest funkcja $f^{-1}\colon \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$ dana wzorem

$$f^{-1}(x) = x^2$$

(zwróćmy uwagę, że funkcja f^{-1} *nie* jest funkcją zdefiniowaną na całej prostej rzeczywistej). Wiemy ponadto, że

$$(f^{-1})'(x) = 2x,$$

zatem, ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej, otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ĆWICZENIA 2. Zastosowanie rachunku różniczkowego do obliczania wartości przybliżonych oraz granic funkcji.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności wykorzystania rachunku różniczkowego do badania własności funkcji.

Zakres tematyczny zajęć:

- Podstawowe własności geometryczne pochodnej.
- Twierdzenie Taylora oraz wzory Taylora i Maclaurina.
- Twierdzenie de l'Hospitala.

Pytania kontrolne:

a) Jaka jest interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie?

b) Jak wygląda wzór Taylora?

c) Jak brzmi twierdzenie de l'Hospitala.

Zadanie 2.1. Znaleźć punkt, w którym styczna do wykresu funkcji f danej wzorem

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2,$$

jest równoległa do osi Ox.

Wskazówka: Wykorzystać zależność między pochodną funkcji w punkcie a współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie.

Zadanie 2.2. Jaki jest kąt między osią Ox a styczną do wykresu funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = x - x^2$$

w punkcie o współrzędnej $x = 1$.

Zadanie 2.3. Pod jakim kątem przecinają się wykresy funkcji $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorami

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin(2x)$$

w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 2.4. W jakim punkcie styczna do wykresu funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = x^2 - 7x + 3$$

jest równoległa do prostej $y = 3 - 5x$.

Zadanie 2.5. Wyznaczyć przybliżoną wartość wyrażenia:

a) $\sqrt{8{,}9}$,

b) $\sqrt{\frac{0{,}9}{1{,}1}}$,

c) $\mathrm{e}^{0{,}19}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Niech

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad x > 0.$$

Chcemy wyznaczyć przybliżoną wartość wyrażenia $f(8{,}9)$. Wykorzystamy w tym celu przybliżenie

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

W naszym przypadku

$$x_0 = 9, \qquad \Delta x = -0.1.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

to

$$f(9 - 0{,}1) \approx f(9) - f'(9) \cdot 0{,}1 = \sqrt{9} - \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}1 = 3 - \frac{1}{180} = 2{,}99(4).$$

Z drugiej strony, posługując się kalkulatorem, widzimy że

$$\sqrt{8,9} = 2{,}983\ldots$$

Zadanie 2.6. O ile w przybliżeniu zwiększy się objętość kuli o promieniu 1 m, jeżeli jej promień zwiększymy o 1 cm.

Zadanie 2.7. Sprawdzić, że dla funkcji $f\colon \langle -2, 2\rangle \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = x - x^2,$$

spełnione są założenia twierdzenia Lagrange'a oraz wyznaczyć wartość stałej c z tezy tego twierdzenia.

Rozwiązanie. Zauważmy, że funkcja f jest ciągła i różniczkowalna dla każdego $x \in (-2, 2)$. Na mocy twierdzenia Lagrange'a wynika stąd, że istnieje $c \in (-2, 2)$, dla którego

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = (2 - (-2))f'(c).$$

Ponieważ $f'(x) = 1 - 2x$, to powyższa równość przyjmuje postać

$$-2 = 4(1 - 2c),$$

lub równoważnie

$$8c = 6,$$

skąd

$$c = \frac{3}{4}.$$

Zadanie 2.8. Wykorzystując regułę de l'Hospitala, wyznaczyć granice:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\sin 3x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}$,

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$,

g) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$,

h) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \operatorname{ctg} x$,

j) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$,

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Zauważmy najpierw, że

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{x}{\sin x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Oznacza to, że granica

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$$

jest wyrażeniem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Ponieważ licznik i mianownik są funkcjami różniczkowalnymi, możemy spróbować użyć reguły de l'Hospitala (nie mamy jeszcze pewności, że ta metoda da nam poszukiwany wynik). Mamy

$$\frac{(x\operatorname{ctg} x - 1)'}{(x^2)'} = \frac{\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \frac{\sin x\cos x - x}{2x\sin^2 x}.$$

Przy $x \to 0$ jest to ponownie wyrażenie typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, więc spróbujmy kolejny raz zastosować regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy

$$\frac{(\sin x\cos x - x)'}{(2x\sin^2 x)'} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2\sin^2 x + 4x\sin x\cos x} = \frac{-2\sin^2 x}{2\sin x(\sin x + 2x)} = \frac{-\sin x}{\sin x + 2x},$$

a następnie

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\sin x + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x} + 2} = -\frac{1}{3},$$

co ostatecznie dowodzi, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2} = -\frac{1}{3}.$$

Zadanie 2.9. Wyznaczyć pochodne rzędu n podanych funkcji:

a) $f(x) = xe^x$ dla $n = 5$,

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla $n = 4$,

c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ dla $n = 3$.

Zadanie 2.10. Napisać wzór Taylora dla funkcji f w punkcie x_0 z resztą w postaci Lagrange'a dla podanego n:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x_0 = 1$ i $n = 3$,

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x_0 = 2$ i $n = 4$,

c) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ dla $x_0 = 0$ i $n = 3$.

Zadanie 2.11. Wyznaczyć wartość wyrażenia $\sqrt{8{,}9}$ z dokładnością do 10^{-5}.

Rozwiązanie. Niech funkcja $f\colon (0, +\infty)$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad x \geqslant 0.$$

Dla dowolnego $x > 0$ mamy

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

i ogólnie (sprawdzić indukcyjnie!)

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}, \qquad n \geqslant 2.$$

Ze wzoru Taylora dla $x = 8{,}9$, $x_0 = 9$ i dowolnego $n \geqslant 1$ wynika, że istnieje taka liczba $c \in (8{,}9; 9)$, dla której

$$f(8,9) = f(9) - \frac{f'(9)}{1!}\frac{1}{10} + \frac{f''(9)}{2!}\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(9)}{(n-1)!}\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\left(-\frac{1}{10}\right)^n.$$

Wystarczy znaleźć teraz takie $n \geqslant 1$, że reszta

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\frac{1}{10^n}$$

spełnia warunek

$$\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\frac{1}{10^n}\right| \leqslant 10^{-5}$$

dla dowolnej liczby $c \in (8{,}9; 9)$. Zauważmy, że

$$|f^{(3)}(4)| = \frac{3}{8}\frac{1}{2^5} = \frac{3}{256},$$

a w konsekwencji

$$|f^{(3)}(4)|\frac{1}{3! \cdot 10^3} = \frac{1}{512} \cdot \frac{1}{10^3} \leqslant \frac{1}{10^5}.$$

Ponieważ funkcja $f^{(3)}$ jest malejąca na przedziale $(8{,}9; 9)$, to z powyższej nierówności wynika, że

$$|f^{(3)}(c)|\frac{1}{3!\cdot 10^3} \leqslant \frac{1}{10^5}$$

dla dowolnego $c \in (8{,}9; 9)$. Wartość $\sqrt{8{,}9}$ można zatem przybliżyć z dokładnością 10^{-5}, znajdując sumę trzech pierwszych składników we wzorze Taylora. Mamy

$$f(9) = 3, \qquad f'(9) = \frac{1}{6}, \qquad f''(9) = -\frac{1}{4\cdot 27},$$

skąd

$$\sqrt{8{,}9} \approx 3 - \frac{1}{6}\frac{1}{10} - \frac{1}{8\cdot 27}\frac{1}{100} = 2{,}98328(703).$$

Wynik ten możemy porównać z rzeczywistą wartością znalezioną na przykład przy użyciu kalkulatora:

$$\sqrt{8{,}9} = 2{,}983286\ldots$$

Zadanie 2.12. Rozwinąć w szereg Maclaurina podane funkcje:

a) $f(x) = x^2 e^x$,

b) $f(x) = e^x \sin x$,

c) $f(x) = \cos^2 x$,

d) $f(x) = e^{-x^2}$.

ĆWICZENIA 3. Badanie monotoniczności i wyznaczanie ekstremów funkcji jednej zmiennej z wykorzystaniem rachunku różniczkowego.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności wykorzystania rachunku różniczkowego do badania własności funkcji.

Zakres tematyczny zajęć:

- Związek pochodnej z zachowaniem się funkcji.

Pytania kontrolne:

a) Jaki jest związek znaku pochodnej funkcji na danym przedziale z jej monotonicznością na tym przedziale?

b) Kiedy funkcja różniczkowalna ma w danym punkcie ekstremum lokalne?

c) Jak szukać największej i najmniejszej wartości funkcji na zadanym przedziale?

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 3.1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności następujących funkcji w ich dziedzinach naturalnych:

a) $f(x) = x^2(x-2)$,

b) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$,

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-6x-16}$,

d) $f(x) = x\ln x$,

e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$,

f) $f(x) = x^3\mathrm{e}^x$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Dziedziną naturalną D_f funkcji f jest zbiór liczb nieujemnych, to znaczy $D_f = \langle 0, +\infty)$. Jest to funkcja różniczkowalna w całej swojej dziedzinie oraz dla $x \in D_f$ mamy

$$f'(x) = \sqrt{x} + (x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{x-1}{2x}\right) = \sqrt{x}\frac{3x-1}{2x}.$$

Ponieważ dla $x > 0$ zachodzi $\sqrt{x} > 0$ oraz $2x > 0$, to

$$x \in D_f \wedge f'(x) > 0 \iff 3x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{3}$$

oraz analogicznie

$$x \in D_f \wedge f'(x) < 0 \iff x > 0 \wedge 3x - 1 < 0 \iff x \in 0 < x < \frac{1}{3}.$$

Ostatecznie widzimy, że funkcja f jest rosnąca na przedziale $\langle 3^{-1}, +\infty)$, a malejąca na przedziale $\langle 0, 3^{-1}\rangle$.

Zadanie 3.2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji w ich dziedzinach naturalnych

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$,

b) $f(x) = x^3\mathrm{e}^{-x}$,

c) $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$,

d) $f(x) = x\ln x$,

e) $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Dziedziną naturalną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$. Jest to funkcja różniczkowalna w całej swojej dziedzinie oraz

$$f'(x) = 3x^2\mathrm{e}^{-x} - x^3\mathrm{e}^{-x} = x^2\mathrm{e}^{-x}(3-x).$$

Stąd otrzymujemy

$$f'(x) = 0 \iff x = 3.$$

Oznacza to, że zbiór punktów krytycznych funkcji f jest równy $\{3\}$. Ponadto, ponieważ

$$3 - x > 0 \qquad \text{dla} \qquad x < 3$$

oraz

$$3 - x < 0 \qquad \text{dla} \qquad x > 0,$$

to funkcja f ma maksimum lokalne właściwe w punkcie $x = 3$. Minimum to jest równe

$$f(3) = 27\mathrm{e}^{-3} = \frac{27}{\mathrm{e}^3}.$$

Jest to jedyne ekstremum lokalne funkcji f.

Zadanie 3.3. Wykazać poniższe nierówności:

a) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ dla $x > 0$,

b) $\mathrm{e}^x > 1 + x$ dla $x \neq 0$,

c) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ dla $x > 0$,

d) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ dla $x > 0$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Zdefiniujmy funkcję $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Jest to funkcja różniczkowalna w całej swojej dziedzinie oraz

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \qquad x > 0.$$

Zbiorem punktów krytycznych funkcji f jest zatem

$$\left\{x > 0\colon 1 - \frac{1}{x^2} = 0\right\} = \left\{x > 0\colon 1 = \frac{1}{x^2}\right\} = \left\{x > 0\colon x^2 = 1\right\} = \{1\}.$$

Ponieważ

$$f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

to $f''(1) = 2 > 0$, co oznacza, że funkcja f ma w punkcie $x = 1$ minimum lokalne właściwe równe

$$f(1) = 2.$$

Wynika stąd, że

$$f(x) \geqslant 2$$

dla dowolnego $x > 0$, a ta nierówność jest równoważna nierówności wyjściowej.

Zadanie 3.4. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f na zadanych przedziałach:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $-3/2 \leqslant x \leqslant 5/2$,

b) $f(x) = x^2 \ln x$, $\mathrm{e}^{-1} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$,

c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1-x}{1+x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

d) $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x$, $\mathrm{e}^{-1} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^4$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Funkcja f jest różniczkowalna w całym rozważanym przedziale. Jak łatwo sprawdzić, funkcja ta ma dwa punkty krytyczne: $x_0 = -1$ oraz $x_1 = 1$. Oznacza to (zwróćmy uwagę, że nie musimy wiedzieć, czy funkcja f ma w punktach krytycznych ekstrema lokalne), że funkcja f może przyjąć wartość najmniejszą i największą wyłącznie w punktach krytycznych, bądź na końcach przedziału $\langle -3/2, 5/2 \rangle$. Wystarczy teraz obliczyć

$$f(-3/2) = \frac{33}{8}, \qquad f(5/2) = \frac{89}{8}, \qquad f(-1) = 5, \qquad f(1) = 1$$

i zauważyć, że najmniejszą wartością funkcji jest 1, a największą $\frac{89}{8}$.

Zadanie 3.5. Wykazać, że prawdziwe są następujące tożsamości:

a) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$ dla $x > -1$,

b) $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ dla $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Wskazówka: Wystarczy sprawdzić, że podane tożsamości zachodzą dla jednego x oraz wykazać, że funkcje występujące po lewych stronach obu nierówności są stałe.

Zadanie 3.6. Z drutu o długości 80 cm zrobiono szkielet prostopadłościanu o podstawie kwadratowej. Który z prostopadłościanów ma największą objętość?

Rozwiązanie. Załóżmy, że długość krawędzi podstawy jest równa x cm (oczywiście $0 \leqslant x \leqslant 10$). Ponieważ przy konstrukcji jednej podstawy zużyto $4x$ cm drutu, to do zbudowania czterech wysokości pozostało $80 - 8x$ cm drutu. Objętość takiego prostopadłościanu jest zatem równa

$$x^2 \frac{80 - 8x}{4} = x^2(20 - 2x).$$

Wystarczy teraz znaleźć największą wartość funkcji $f\colon \langle 0, 10\rangle \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = x^2(20 - 2x).$$

Jest to funkcja różniczkowalna oraz

$$f'(x) = 2x(20 - 2x) - 2x^2 = -6x^2 + 40x = -2x(3x - 20).$$

Łatwo teraz sprawdzić, że funkcja f przyjmuje największą wartość w punkcie $x = \frac{20}{3}$. Wynika stąd, że największą możliwą objętością takiego prostopadłościanu jest $f(20/3)$.

Zadanie 3.7. Który z prostokątów o obwodzie 100 cm ma najkrótsza przekątną?

Zadanie 3.8. Prostopadłościenne pudełko mające w podstawie kwadrat, ma mieć objętość 2000 cm^3. Materiał na dno kosztuje 30 zł za cm^2, zaś na ściany boczne jest o połowę tańszy. Jakie powinny być wymiary pudełka, aby koszt zużytego materiału był minimalny?

Zadanie 3.9. Dwa miasta (A i B) leżą po dwóch stronach rzeki. Szerokość rzeki jest stała i wynosi 100 m, a odległość między miastami A i B wzdłuż rzeki jest równa 1 km. Załóżmy, że prędkość poruszania się po lądzie jest a razy większa niż prędkość poruszania się w wodzie. Pod jakim kątem należy przeprawić się przez rzekę, aby czas podróży z miasta A do B był możliwie najkrótszy?

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

ĆWICZENIA 4. Obliczanie całek nieoznaczonych z zastosowaniem wybranych metod całkowania.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności obliczania wybranych rodzajów całek nieoznaczonych.

Zakres tematyczny zajęć:

- Przegląd podstawowych metod całkowania.

Pytania kontrolne:

a) Jak wygląda wzór na całkowanie przez podstawienie?

b) Jak wygląda wzór na całkowanie przez części?

Zadanie 4.1. Wykorzystując podstawowe wzory na całki funkcji elementarnych, wyznaczyć:

a) $\displaystyle\int (x^3+3x^2+5x+1)\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \left(x^{3/2}+\sqrt{x^5}-\sqrt[5]{x^4}\right)\mathrm{d}x$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Ponieważ

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C,\qquad \int x^{-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C,\qquad \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{3/2}+C,$$

to

$$\int \left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\ln|x|+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C.$$

Zadanie 4.2. Wykorzystując wzór na całkowanie przez podstawienie, wyznaczyć:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}(1-2x)\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3\,x\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{3\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,\mathrm{d}x$,

k) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

l) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Mamy

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}\sin x=y\\ \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\end{bmatrix}=\int\frac{1}{y^{2/5}}\,\mathrm{d}y=$$
$$=\int y^{-2/5}\,\mathrm{d}y=-\frac{5}{3}y^{3/5}+C=-\frac{5}{3}(\sin x)^{5/3}+C.$$

h) Mamy

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} \ln x = y \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \int \frac{y}{\sqrt{1+2y}}\,\mathrm{d}y = \\
&= \begin{bmatrix} 1+2y = z \\ y = \frac{z-1}{2} \\ 2\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{z-1}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{4}\left[\int \sqrt{z}\,\mathrm{d}z - \int z^{-1/2}\,\mathrm{d}z\right] = \\
&= \frac{1}{6}z^{3/2} - \frac{1}{2}\sqrt{z} + C = \frac{1}{6}\sqrt{(1+2y)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2y} + C = \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{(1+2\ln x)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2\ln x} + C.
\end{aligned}$$

Zadanie 4.3. Wykorzystując wzór na całkowanie przez części, wyznaczyć:

a) $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$,

c) $\int x^2 \mathrm{e}^{-x}$,

d) $\int x^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$,

f) $\int \mathrm{e}^{-2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x$,

g) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x$,

h) $\int x \arcsin x\,\mathrm{d}x$,

i) $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$,

j) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$,

k) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

Przykładowe rozwiązania:

d) Mamy

$$\begin{aligned}
\int x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{1}{3}\int x^3(\ln^2 x)'\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^3\ln(x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Ostatnią całkę obliczamy, ponownie wykorzystując wzór na całkowanie przez części:

$$\begin{aligned}\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\int x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3\ln x - \frac{2}{27}x^3 + C.$$

g) Mamy

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = \int (x)'\operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arc\,tg} x - \int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ostatnią całkę obliczamy, wykorzystując wzór na całkowanie przez podstawienie:

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix}1+x^2=y\\ 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\ln|y| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Zadanie 4.4. Wyznaczyć całki z funkcji wymiernych:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int\frac{6x-7}{3x^2-7x+11}\,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int\frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,\mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int\frac{x-5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x,$

f) $\displaystyle\int\frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x,$

g) $\displaystyle\int\frac{x^5+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x,$

h) $\displaystyle\int\frac{x^3-4}{x^3+4x}\,\mathrm{d}x,$

i) $\displaystyle\int\frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x,$

j) $\displaystyle\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,\mathrm{d}x,$

k) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x,$

l) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x,$

m) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$

Przykładowe rozwiązania:

a) Zauważmy, że
$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4.$$
Wykorzystując wzór na całkowanie przez podstawienie, otrzymujemy
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x+1=y \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}y\end{bmatrix} = \\ &= \int \frac{1}{y^2+4}\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} y=2z \\ \mathrm{d}y=2\,\mathrm{d}z\end{bmatrix} = 2\int \frac{1}{4z^2+4}\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z + C = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + C.\end{aligned}$$

b) Zauważmy, że
$$(3x^2-7x+11)'=6x-7,$$
a w konsekwencji
$$\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 3x^2-7x+11=y \\ (6x-7)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\end{bmatrix} = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y|+C = \ln(3x^2-7x+11)+C.$$
Zwróćmy uwagę, że trójmian kwadratowy wewnątrz funkcji logarytm jest ściśle dodatni, więc wartość bezwzględna mogła zostać opuszczona.

d) W tej całce wykorzystamy podejście z przykładów a) i b). Zauważmy, że
$$(x^2-2x+2)'=2x-2$$
oraz
$$x-5=\frac{1}{2}(2x-2)-4.$$
Możemy zatem rozbić całkę na dwa składniki
$$\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)-4}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$$
Pierwszą z tych całek obliczamy tak jak w przykładzie b), otrzymując
$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2-2x+2)+C,$$
a drugą tak jak w przykładzie a), otrzymując (w odróżnieniu od przykładu a), w poniższym rachunku wykonamy tylko jedno podstawienie, co trochę przyspieszy obliczenia)
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x-1)^2+2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x-1=\sqrt{2}y \\ \mathrm{d}x=\sqrt{2}\,\mathrm{d}y\end{bmatrix} = \\ &= \sqrt{2}\int \frac{1}{2y^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} y + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

e) Zauważmy, że
$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5).$$
Rozkładając funkcję wymierną
$$\frac{1}{x^2-6x+5}$$
na ułamki proste, otrzymujemy
$$\frac{1}{x^2-6x+5}=\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{x-5},$$
a w konsekwencji
$$\int\frac{1}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x-5|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.$$

Zadanie 4.5. Wykorzystując podstawienie Eulera, wyznaczyć:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int\frac{4x-1}{\sqrt{x^2-10x+9}}\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,\mathrm{d}x$,

f) $\displaystyle\int\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 4.6. Wyznaczyć całki zawierające funkcje trygonometryczne:

a) $\displaystyle\int\sin x\sin(3x)\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int\cos(4x)\cos(7x)\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int\cos(2x)\sin(4x)\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$,

f) $\displaystyle\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int\frac{1}{4-5\sin x}\,\mathrm{d}x$,

k) $\displaystyle\int\frac{1}{5-3\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Przykładowe rozwiązania:

j) Wykorzystując uniwersalne podstawienie trygonometryczne, otrzymujemy

$$\int \frac{1}{4-5\sin x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = y \\ \sin x = \frac{2y}{1+y^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+y^2}}{4-5\frac{2y}{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = 2\int \frac{\frac{1}{1+y^2}}{\frac{4+4y^2-10y}{1+y^2}}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int \frac{1}{2y^2-5y+2}\,\mathrm{d}y.$$

Ostatnią całkę obliczamy tak jak całkę z funkcji wymiernej.

ĆWICZENIA 5. Obliczanie i zastosowanie całek oznaczonych i niewłaściwych.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności obliczania wybranych rodzajów całek oznaczonych i niewłaściwych.

Zakres tematyczny zajęć:

- Obliczanie całek oznaczonych i niewłaściwych.
- Własności geometryczne całek oznaczonych.

Pytania kontrolne:

a) Jaki jest związek między całką oznaczoną a nieoznaczoną?

b) Czym się różni całka niewłaściwa od całki oznaczonej?

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 5.1. Obliczyć następujące całki oznaczone

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$,

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3\sin x\,\mathrm{d}x$,

k) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

l) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Wyznaczmy najpierw całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\mathrm{e}^x = y\\ \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\end{array}\right] = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{arc\,tg}\,y + C = \mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^x + C.$$

Wykorzystując związek między całką oznaczoną a nieoznaczoną, otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e} - \mathrm{arc\,tg}\,1 = \mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e} - \frac{\pi}{4}.$$

d) Mamy

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x &= \int_0^4 x\cdot x^2\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}x^2+9 = y\\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\end{array}\right] =\\ &= \frac{1}{2}\int_9^{25}(y-9)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_9^{25}(y^{3/2}-9y^{1/2})\,\mathrm{d}y =\\ &= \frac{1}{5}y^{5/2}\Big|_9^{25} - 3y^{3/2}\Big|_9^{25} = 5^4 - \frac{3^5}{5} - 3\cdot 5^3 + 3^4 =\\ &= \frac{1412}{5}.\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że w powyższych obliczeniach nie wyznaczaliśmy najpierw całki nieoznaczonej, tylko skorzystaliśmy ze wzoru na całkowanie przez podstawienie w całce oznaczonej. Należy przy tym tylko pamiętać, aby przy wykonywaniu podstawienia zmienić granice całkowania.

Zadanie 5.2. Obliczyć następujące całki niewłaściwe lub pokazać, że są one rozbieżne:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$,

f) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$,

k) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}\,\mathrm{d}x$,

l) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{3x^2+5x-2}\,\mathrm{d}x$,

m) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Funkcja podcałkowa jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle -1, 0)$, natomiast jest nieograniczona w otoczeniu punktu $x = 0$. Z definicji całki nieoznaczonej mamy

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0^-} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{c} =$$
$$= \lim_{c\to 0^-} \left(-\frac{1}{c} - 1\right) = \left[-\frac{1}{0^-} - 1\right] = [+\infty - 1] = +\infty,$$

zatem całka

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

jest rozbieżna do $+\infty$.

i) Funkcja podcałkowa jest ciągła i ograniczona w przedziale $\langle 2, +\infty)$, więc z definicji całki nieoznaczonej

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \int_{2}^{c} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \ln x = y \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array}\right] =$$
$$= \lim_{c\to+\infty} \int_{\ln 2}^{c} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{2}^{c} =$$
$$= \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 5.3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi. Przed obliczeniami wykonać rysunek i zapiać wyznaczony obszar w postaci zbioru punktów.

a) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$,

b) $y = \sin x$, $y = \cos x$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

c) $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$,

d) $y = x^3 - x^2 - x$, $y = x$,

e) $y = \ln x$, $x = \mathrm{e}^{-1}$, $x = \mathrm{e}$, $y = 0$,

f) $y = |x - 2|$, $y = \sqrt{x}$,

g) $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 4$ dla $x \geqslant 0$,

h) $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $x = 1$, $y = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$,

i) $y = 2x + 2$, $y = \frac{4}{x}$, $y = \sqrt{x} - 1$, $x = 0$,

j) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Należy najpierw wyznaczyć punkty przecięcia krzywych

$$y = 2x - x^2, \qquad x + y = 0.$$

Druga krzywa jest prostą o równaniu

$$y = -x,$$

więc aby znaleźć współrzędne x punktów przecięcia musimy rozwiązać równanie kwadratowe

$$2x - x^2 = -x.$$

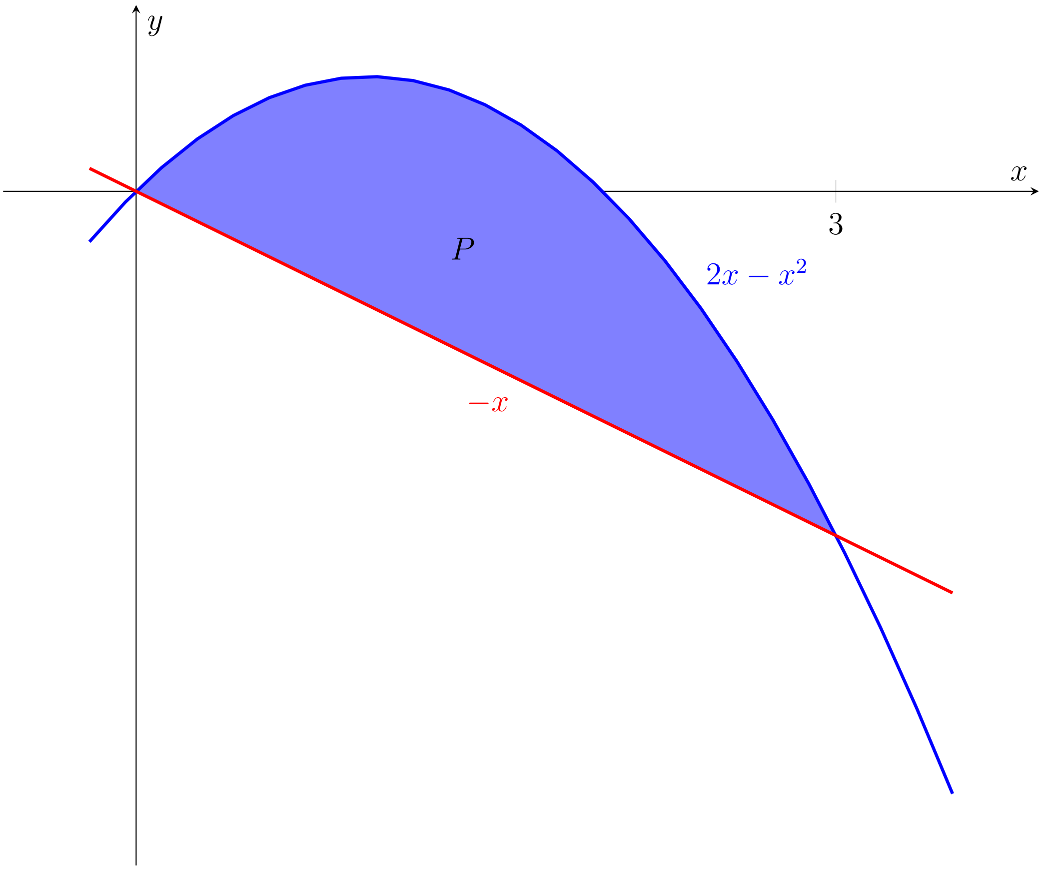
Jest ono równoważne równaniu

$$3x - x^2 = 0,$$

lub

$$x(3 - x) = 0.$$

Oznacza to, że punktami przecięcia są punkty $(0, 0)$ oraz $(3, -3)$. Narysujmy teraz rozważany obszar.



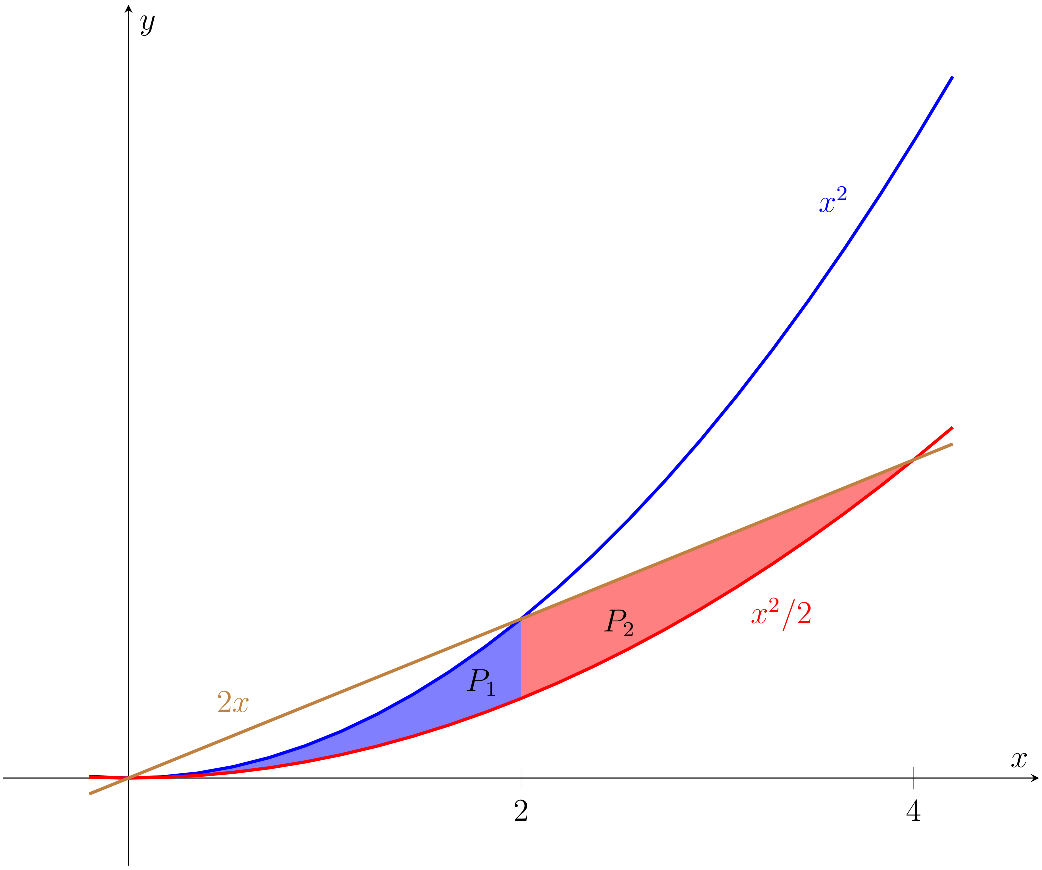
Mamy

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant 3,\ -x \leqslant y \leqslant 2x - x^2\},$$

więc z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej otrzymujemy

$$|P| = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (3x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.$$

j) Narysujmy rozważany obszar.



Pole tego obszaru jest równe sumie pól obszaru zaznaczonego na niebiesko (P_1) oraz obszaru zaznaczonego na czerwono (P_2). Obszary te można zapisać następująco

$$P_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant 2,\ \frac{x^2}{2} \leqslant y \leqslant x^2\right\},$$
$$P_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2 \leqslant x \leqslant 4,\ \frac{x^2}{2} \leqslant y \leqslant 2x\right\}.$$

Wykorzystując interpretację geometryczną całki oznaczonej, mamy

$$|P_1| = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

oraz

$$|P_2| = \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = 12 - \frac{56}{6} = \frac{16}{6}.$$

Suma tych dwóch pól jest równa

$$|P_1| + |P_2| = \frac{4}{3} + \frac{16}{6} = 4.$$

Zadanie 5.4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \mathrm{e}^x$, styczną do tej krzywej w punkcie $x = 1$ i prostą $x = -2$.

Zadanie 5.5. Obliczyć długości podanych krzywych:

a) $y = \ln(1 - x^2)$, $\dfrac{-1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$,

b) $y = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$,

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Ze wzoru na długość krzywej wynika, że poszukiwana długość L dana jest całką

$$L = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1 + \left[\left(\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)'\right]^2}\, dx.$$

Mamy

$$\left(\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)' = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1},$$

a w konsekwencji

$$1 + \left[\left(\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)'\right]^2 = \frac{(e^{2x} - 1)^2 + 4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{(e^{2x} - 1)^2} = \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right)^2.$$

Ponieważ wyrażenie

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

jest dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to

$$L = \int_{1/2}^{1} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\, dx.$$

Poszukiwaną całkę sprowadzimy przez odpowiednie podstawienie do całki z funkcji wymiernej. Mamy

$$L = \int_{1/2}^{1} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\, dx = \begin{bmatrix} e^{2x} - 1 = y \\ e^{2x} = y + 1 \\ 2e^{2x}\, dx = dy \\ dx = \dfrac{1}{2(y+1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{y + 2}{y} \frac{1}{y + 1}\, dx.$$

Funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{y + 2}{y(y + 1)} = \frac{2}{y} - \frac{1}{y + 1},$$

co implikuje, że

$$\begin{aligned}\int_{e-1}^{e^2-1} \frac{y+2}{y}\frac{1}{y+1}\,dx &= \int_{e-1}^{e^2-1}\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{y+1}\right)dy = \\ &= 2\ln\frac{e^2-1}{e-1} - \ln e^2 + \ln e = 2\ln\frac{e^2-1}{e-1} - 1 = \\ &= 2\ln(e+1) - 1.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$L = \ln(e+1) - \frac{1}{2}.$$

Zadanie 5.6. Obliczyć objętość brył powstałych z obrotu następujących krzywych dookoła osi Ox:

a) $y = x\sqrt{e^x}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$,

b) $y = \ln x$ dla $1 \leqslant x \leqslant e$,

c) $y = \sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$,

d) $y = \sin x$ dla $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

e) $y = \operatorname{tg} x$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$,

f) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ dla $0 \leqslant x < 1$,

g) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ dla $0 \leqslant x$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Wykorzystując wzór na objętość brył obrotowych, szukana wielkość jest równa

$$V = \pi\int_1^e \ln^2 x\,dx.$$

Całkę tę obliczymy przy pomocy wzoru na całkowanie przez części, mianowicie

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln^2 x\,dx &= \int_1^e (x)'\ln^2 x\,dx = \\ &= x\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x(\ln^2 x)'\,dx = \\ &= e - 2\int_1^e \ln x\,dx.\end{aligned}$$

Ostatnią całkę wyznaczamy, ponownie wykorzystując wzór na całkowanie przez częsci,

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} (x)' \ln x \, \mathrm{d}x = \\ &= x \ln x \Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)' \, \mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{e} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$V = \pi(\mathrm{e} - 2).$$

e) Ze wzoru na objętość brył obrotowych szukana wielkość równa

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Wynika stąd, że

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \mathrm{d}x = \pi \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} - \frac{\pi^2}{4} = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

Zadanie 5.7. Wyprowadzić wzory na objętość oraz pole powierzchni obrotowej

a) walca o promieniu podstawy r i wysokości h,

b) kuli o promieniu r.

Zadanie 5.8. Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu dookoła osi Ox krzywych:

a) $y = 2x^3$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$,

b) $y = \sqrt{x + 2}$ dla $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Szukane pole dane jest wzorem

$$S = 2\pi \int_0^1 2x^3 \sqrt{1 + [(2x^3)']^2} \, \mathrm{d}x.$$

Ponieważ

$$(2x^3)' = 6x^2,$$

to

$$
\begin{aligned}
S &= 4\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+36x^4}\,\mathrm{d}x = \\
&= \begin{bmatrix} 1+36x^4 = y \\ 36x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \frac{\pi}{18}\int_1^{37}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\pi}{18}\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_1^{37} = \\
&= \frac{\pi}{27}\left(\sqrt{37^3}-1\right).
\end{aligned}
$$

Zadanie 5.9. Zbadać zbieżność szeregów, wykorzystując kryterium całkowe zbieżności szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$,

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Zastosujemy kryterium całkowe dla funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \qquad x \geqslant 2.$$

Ponieważ

$$\ln x > 0$$

dla dowolnego $x \geqslant 2$, to funkcja f jest nieujemna. Musimy jeszcze sprawdzić, że na przedziale $\langle 2, +\infty)$ jest ona nierosnąca. Aby to zrobić, policzymy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4}.$$

Widzimy zatem, że znak pochodnej (dla $x \geqslant 2$) zależy wyłącznie od znaku wyrażenia

$$1 - 2\ln x = 1 - \ln x^2.$$

Jednak funkcja logarytm jest ściśle rosnąca, więc

$$1 - \ln x^2 \leqslant 1 - \ln 2^2 < 1 - \ln \mathrm{e} = 0$$

dla dowolnego $x \geqslant 2$. Oznacza to, że

$$f'(x) < 0, \qquad x \geqslant 2,$$

więc funkcja f jest malejąca.

Założenia kryterium całkowego są spełnione, więc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} \qquad \sim \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \ln x = y \\ x = \mathrm{e}^y \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \\
= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{y}{\mathrm{e}^y}\,\mathrm{d}y = \int_{\ln 2}^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \\
= \int_{\ln 2}^{+\infty} y\left(-\mathrm{e}^{-y}\right)'\,\mathrm{d}y = \\
= -y\mathrm{e}^{-y}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} + \int_{\ln 2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \\
= -y\mathrm{e}^{-y}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} - \mathrm{e}^{-y}\Big|_{\ln 2}^{+\infty}.
\end{aligned}$$

Musimy teraz sprawdzić, czy to wyrażenie jest skończone. Mamy

$$-y\mathrm{e}^{-y}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \ln\sqrt{2} - \lim_{c\to+\infty} c\mathrm{e}^{-c}.$$

Ostatnią granicę możemy policzyć, wykorzystując twierdzenie de l'Hospitala:

$$\lim_{c\to+\infty} \frac{(c)'}{(\mathrm{e}^c)'} = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^c} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0,$$

więc

$$\lim_{c\to+\infty} c\mathrm{e}^{-c} = 0.$$

Ponadto

$$\mathrm{e}^{-y}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{2} - \lim_{c\to+\infty} \mathrm{e}^{-c} = 0.$$

Oznacza to, że całka

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna, co implikuje zbieżność szeregu liczbowego

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Uwaga. Pamiętajmy, że zbieżność szeregu nie zależy od wartości dowolnie wielu wyrazów początkowych, więc aby stosować kryterium całkowe wystarczy, aby funkcja f była nierosnąca *od pewnego miejsca.*

f) Podobnie jak w przykładzie b) kładziemy

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1}, \qquad x \geqslant 2.$$

Mamy

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} > 1, \qquad x \geqslant 2,$$

co powoduje, że funkcja f jest dodatnia dla $x \geqslant 2$. Ponadto

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^{-3/2} \ln \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x}\frac{x-1}{x+1}\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \\ &= -x^{-3/2} \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x(x+1)(x-1)}, \end{aligned}$$

a oba składniki po prawej stronie są ujemne (dlaczego?), więc

$$f'(x) < 0, \qquad x \geqslant 2.$$

Przystępujemy zatem do badania zbieżności całki niewłaściwej

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{r} \sqrt{x} = y \\ x = y^2 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right] = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \ln \frac{y^2+1}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \ln \frac{y^2-1+2}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{y^2-1}\right)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Ostatniej całki nie wyznaczymy w sposób jawny, ale pokażemy, że jest zbieżna. Z nierówności z zadania 3.3 d) wynika, że

$$\ln\left(1 + \frac{2}{y^2-1}\right) < \frac{2}{y^2-1}$$

dla dowolnego $y \geqslant \sqrt{2}$ (to gwarantuje też, że $y^2 - 1 > 0$). Jednocześnie, ponieważ

$$\frac{y^2}{2} \geqslant \frac{2}{2} = 1, \qquad y \geqslant \sqrt{2},$$

to

$$\frac{2}{y^2-1} \leqslant \frac{2}{y^2 - \frac{y^2}{2}} = \frac{2}{\frac{y^2}{2}} = \frac{4}{y^2}, \qquad y \geqslant \sqrt{2}.$$

Łącząc te nierówności, otrzymujemy

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{4}{y^2} \, \mathrm{d}y = 4\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \left[-\frac{4}{+\infty} + 4\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Pokazaliśmy, że całka

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1} \, \mathrm{d}x$$

jest zbieżna, więc na mocy kryterium całkowego również szereg

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$$

jest zbieżny.

ĆWICZENIA 6. Kolokwium 1.

Cel ćwiczeń:
Sprawdzenie wiadomości studentów dotyczących zagadnień z rachunku różniczkowego i całkowego.

Zakres tematyczny zajęć:

- Materiał z ćwiczeń od 1 do 5.

ĆWICZENIA 7. Zamiana postaci liczby zespolonej. Działania na liczbach zespolonych.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności posługiwania się liczbami zespolonymi.

Zakres tematyczny zajęć:

- Działania na liczbach zespolonych.
- Zamiana postaci liczby zespolonej.
- Rozwiązywanie równań w liczbach zespolonych.
- Wyznaczanie pierwiastków z liczb zespolonych.

Pytania kontrolne:

a) Jak wyglądają podstawowe działania w zbiorze liczb zespolonych?

b) Jak można interpretować liczby zespolone jako punkty na płaszczyźnie?

c) Jakie są różne postaci liczb zespolonych?

d) Jak wygląda wzór de Moivre'a?

Zadanie 7.1. Przedstawić w postaci algebraicznej liczby zespolone

a) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$,

b) $(5+3i)(4+i)-(3+i)(3-i)$,

c) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$,

d) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$,

e) $(3+i)^3+(3-i)^3$,

f) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$,

g) i^n, gdzie n jest liczbą całkowitą,

h) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{(1-i)^2+(2+i)^2}{(1+i)^2+3i}\right)$,

i) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{4-2i}{1+3i}\right)$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Mamy

$$(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)=6-2i+3i-i^2=6+i-1=5+i.$$

c) Mamy

$$\begin{aligned}\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} &= \frac{35-30i+7i-6i^2}{3+i}=\frac{41-23i}{3+i}=\\ &=\frac{41-23i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\\ &=\frac{123-23-69i-41i}{3^2+1^2}=\frac{100-110i}{10}=10-11i.\end{aligned}$$

Zadanie 7.2. Niech $z=x+iy$ dla pewnych $x,y\in\mathbb{R}$. Wyznaczyć, w terminach x i y, wartości wyrażeń

a) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$,

b) $\mathrm{Re}(z^2)$,

c) $\mathrm{Im}(z^3)$,

d) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$,

e) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right)$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Mamy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2},$$

skąd

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Zadanie 7.3. Wykazać, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzi równość

$$\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2).$$

Zadanie 7.4. Wykazać, że dla dowolnej liczby zespolonej z spełniającej $|z| = 1$, mamy

$$\bar{z} = \frac{1}{z}.$$

Rozwiązanie. Dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $z = x + iy$. Ponieważ $|z| = 1$, to

$$1 = |z|^2 = x^2 + y^2,$$

więc

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x - iy = \bar{z}.$$

Zadanie 7.5. Wykazać, że dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq -1$, mamy

$$\mathrm{Im}\, z = 0 \qquad \iff \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0.$$

Rozwiązanie. Zapiszmy $z = x + iy$ dla odpowiednich $x, y \in \mathbb{R}$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+1} &= \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} \cdot \frac{x+1-iy}{x+1-iy} = \\ &= \frac{x^2-1+y^2+[(x+1)y-(x-1)y]i}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2-1+y^2+2yi}{(x+1)^2+y^2}.\end{aligned}$$

Wiemy zatem, że
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2},$$
co powoduje, że
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} z = 0,$$
co należało wykazać.

Zadanie 7.6. Rozwiązać w liczbach zespolonych równania kwadratowe:

a) $z^2 = i$,

b) $z^2 - z + 1 = 0$,

c) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$,

d) $z^2 + (2i+7)z + 6 + 3i = 0$,

e) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$.

Przykładowe rozwiązania:

b) Równania takie rozwiązujemy identycznie jak równania kwadratowe dla zmiennej rzeczywistej, ale w przypadku, gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego będzie ujemny, to wyznaczamy jeden z zespolonych pierwiastków kwadratowych z Δ i traktujemy jak $\sqrt{\Delta}$.

Mamy
$$\Delta = 1 - 4 = -3.$$
Ponieważ
$$(\sqrt{3}i)^2 = \Delta,$$
to we wzorach na pierwiastki równania kwadratowego przyjmujemy
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i.$$
Otrzymujemy wtedy
$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$
Uwaga. W przypadku ujemnej Δ zawsze będą istniały dwie liczby (różniące się tylko znakiem), które podniesione do kwadratu dadzą Δ. Za pierwiastek z Δ możemy wtedy przyjąć dowolną z nich.

Zadanie 7.7. Przedstawić w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczby zespolone

a) $\sqrt{3} + i$,

b) -3,

c) $-2i$,

d) $1+i$,

e) $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$,

f) $1-(2+\sqrt{3})i$,

g) $-1-\sqrt{3}i$,

h) $2+\sqrt{3}+i$,

i) $\cos\alpha - i\sin\alpha$,

j) $\sin\alpha + i\cos\alpha$,

k) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Mamy

$$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2,$$

więc

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2(\cos\phi + i\sin\phi)$$

dla pewnego kąta $\phi \in \langle 0, 2\pi)$. Zachodzą zatem równości

$$\begin{cases}\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin\phi = \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Na tej podstawie wiemy, że kąt ϕ leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i jest równy

$$\phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Ostatecznie możemy napisać

$$\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$$

Równoważnie możemy zapisać liczbę w postaci wykładniej

$$\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

f) Mamy

$$|1-(2+\sqrt{3})i| = \sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

więc

$$1-(2+\sqrt{3})i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}i\right)=2\sqrt{2+\sqrt{3}}(\cos\phi+i\sin\phi)$$

dla pewnego kąta ϕ. Szukamy więc takiego ϕ, że

$$\begin{cases}\cos\phi=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}},\\ \sin\phi=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.\end{cases}$$

Ponieważ wartość funkcji kosinus jest dodatnia, a wartość funkcji sinus ujemna, to kąt ten musi być z czwartej ćwiartki układu współrzędnych. Zauważmy też, że

$$\cos^2\phi=\frac{1}{4(2+\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=$$
$$=\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}=\cos^2\frac{5\pi}{12}.$$

Otrzymujemy stąd

$$|\cos\phi|=\cos\frac{5\pi}{12},$$

co implikuje

$$\phi=\frac{5\pi}{12}\qquad\text{lub}\qquad\phi=-\frac{5\pi}{12}.$$

Wiemy jednak, że kąt ϕ leży w czwartej ćwiartce ($\sin\phi$ ma wartość ujemną), więc ostatecznie

$$\phi=-\frac{5\pi}{12}$$

i możemy zapisać

$$1-(2+\sqrt{3})i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Jeżeli zależy nam na tym, aby wyznaczyć argument główny (czyli kąt ϕ z przedziału $\langle 0,2\pi)$) liczby $1-(2+\sqrt{3})i$, to wystarczy skorzystać z okresowości funkcji sinus i kosinus:

$$1-(2+\sqrt{3})i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)=$$
$$=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{5\pi}{12}\right)\right)=$$
$$=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right).$$

Zadanie 7.8. Przedstawić w postaci algebraicznej liczby

a) $(1+i)^{100}$,

b) $(-2+2i)^8$,

c) $(1+i\sqrt{3})^{150}$,

d) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$,

e) $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{24}$,

f) $(2-\sqrt{3}+i)^{12}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Zapisując liczbę zespoloną $1+i$ w postaci trygonometrycznej, otrzymujemy

$$1+i=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big).$$

Na mocy wzoru de Moivre'a dostajemy zatem

$$\begin{aligned}(1+i)^{100}&=\sqrt{2}^{100}\Big(\cos\frac{100\pi}{4}+i\sin\frac{100\pi}{4}\Big)=\\&=2^{50}(\cos 25\pi+i\sin 25\pi)=2^{50}=\\&=2^{50}(\cos\pi+i\sin\pi)=2^{50}.\end{aligned}$$

Zadanie 7.9. Wykorzystując wzór de Moivre'a, wyrazić w postaci wielomianów zależnych od $\sin x$ i $\cos x$ funkcje:

a) $\cos(3x)$,

b) $\sin(4x)$,

c) $\sin(5x)$,

d) $\cos(5x)$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Niech

$$z=\cos x+i\sin x.$$

Wtedy, na mocy wzoru de Moivre'a, otrzymujemy

$$z^3=\cos(3x)+i\sin(3x).$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}z^3&=(\cos x+i\sin x)^3=\cos^3 x+i3\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x=\\&=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x+i\Big(3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x\Big).\end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste prawych stron, dostajemy

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x.$$

Zadanie 7.10. Wyrazić za pomocą funkcji sinus i kosinus (w pierwszej potędze) argumentu będącego całkowitą wielokrotnością x funkcje:

a) $\sin^4 x$,

b) $\cos^4 x$,

c) $\sin^5 x$,

d) $\cos^5 x$.

Wskazówka: Wiemy, że

$$\mathrm{e}^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Dodatkowo

$$\mathrm{e}^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi.$$

Odejmując od pierwszej równości drugą, otrzymujemy

$$\mathrm{e}^{i\phi} - \mathrm{e}^{-i\phi} = 2i\sin\phi,$$

czyli

$$\sin\phi = \frac{\mathrm{e}^{i\phi} - \mathrm{e}^{-i\phi}}{2i}.$$

Wystarczy teraz podnieść tę równość stronami do odpowiedniej potęgi i po prawej stronie skorzystać ze wzoru de Moivre'a.

Zadanie 7.11. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiory

a) $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}[(1+2i)z - 3i] < 0\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z + 2 - i| = 2\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - 1 + 2i| \geqslant 1\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C}\colon |(1+i)z - 2| < 4\}$,

e) $\{z \in \mathbb{C}\colon \left|\frac{z+3}{z-2i}\right| \geqslant 1\}$,

f) $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z+1) < 0 \ \wedge \ |i - z| \leqslant 3\}$,

g) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z^2 + 4| \leqslant |z - 2i|\}$,

h) $\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{\pi}{6} \leqslant \arg z < \frac{2\pi}{3}\}$,

i) $\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{\pi}{2} < \arg(z^3) < \pi\}$,

j) $\{z \in \mathbb{C}\colon \arg\left(\frac{i}{z}\right) = \frac{3\pi}{4}\}$,

k) $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z^2) \geqslant 0\}$,

l) $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z^6 < 0\}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}[(1+2i)z-3i] &= \operatorname{Im}[(1+2i)z] - \operatorname{Im}(3i) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im}(2iz) - \operatorname{Im}(3i) = \\ &= \operatorname{Im} z + 2\operatorname{Im}(iz) - 3.\end{aligned}$$

Jak łatwo sprawdzić,

$$\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z,$$

więc

$$\operatorname{Im}[(1+2i)z-3i] = \operatorname{Im} z + 2\operatorname{Re} z - 3.$$

Jeżeli zapiszemy teraz

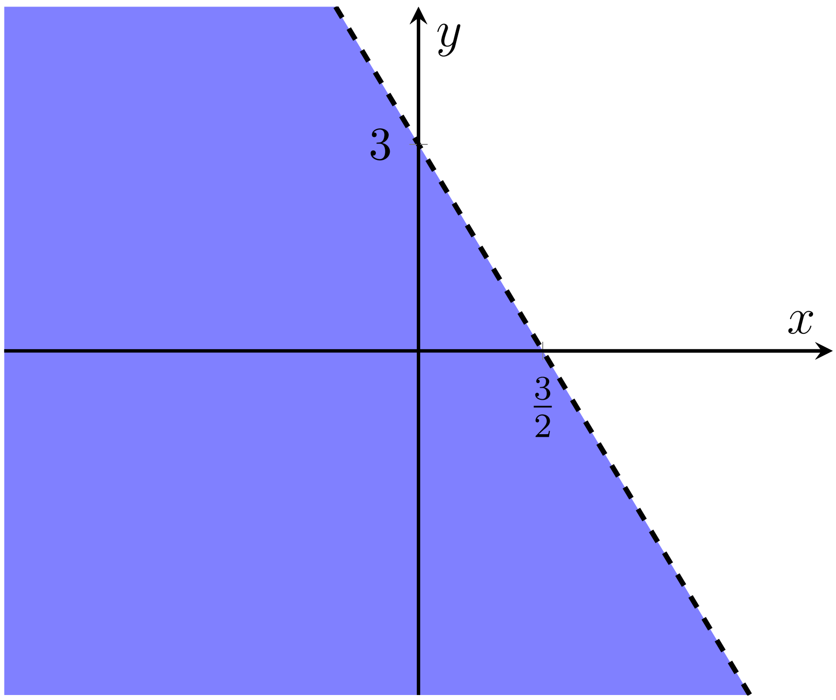
$$z = x + iy,$$

to

$$\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}[(1+2i)z-3i] < 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 2x + y - 3 < 0\}.$$

Poszukiwanym zbiorem jest zatem półpłaszczyzna zdefiniowana przez nierówność

$$y < 3 - 2x.$$



c) W zadaniu tym wykorzystamy informację, że dla liczb zespolonych z i w wielkość

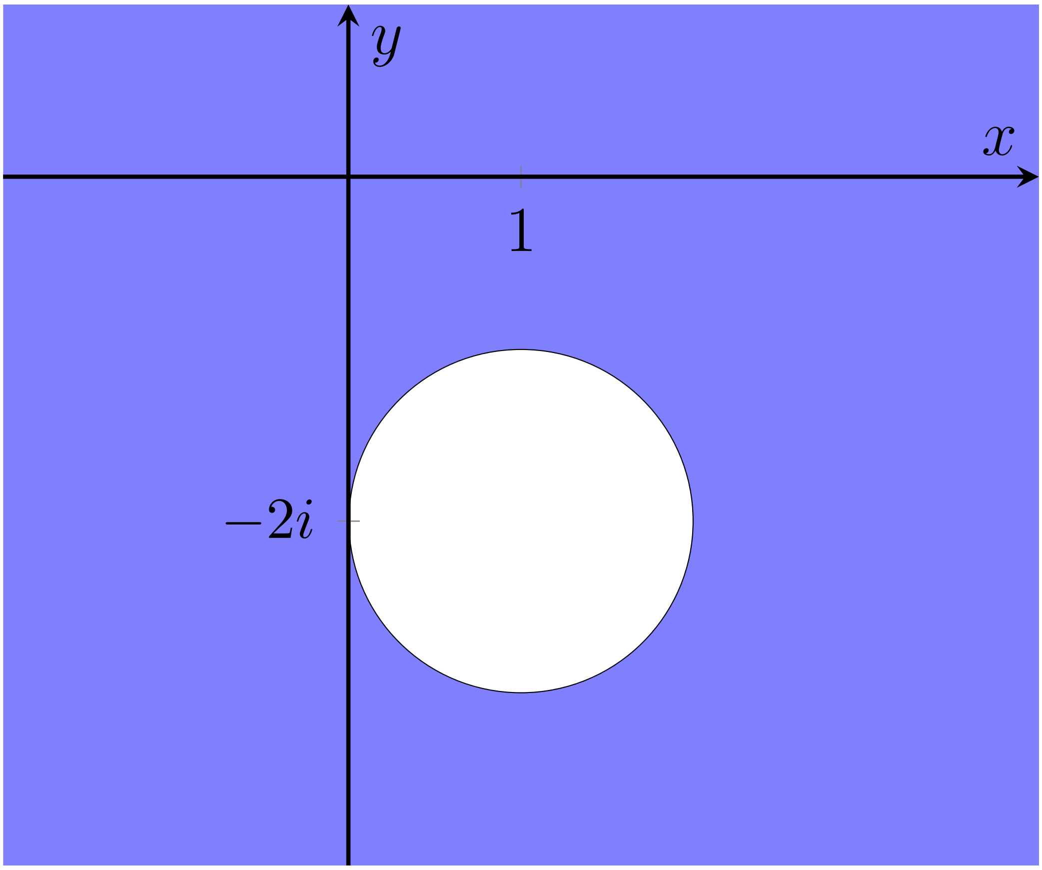
$$|z - w|$$

jest odległością między tymi liczbami (traktowanymi jako elementy płaszczyzny zespolonej).

Mamy

$$\{z \in \mathbb{C}\colon |z - 1 + 2i| \geqslant 1\} = \{|z - (1 - 2i)| \geqslant 1\},$$

więc w rozważanym zbiorze znajdują się liczby zespolone, których odległość na płaszczyźnie zespolonej od liczby $1 - 2i$ jest większa lub równa 1. Jest to zatem zewnętrze koła o środku w punkcie $1 - 2i$ i promieniu 1.



k) Zapiszmy liczbę zespoloną z w postaci trygonometrycznej

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Wtedy

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi).$$

Wynika stąd, że

$$\mathrm{Re}(z^2) = |z|^2\cos 2\phi,$$

a w konsekwencji

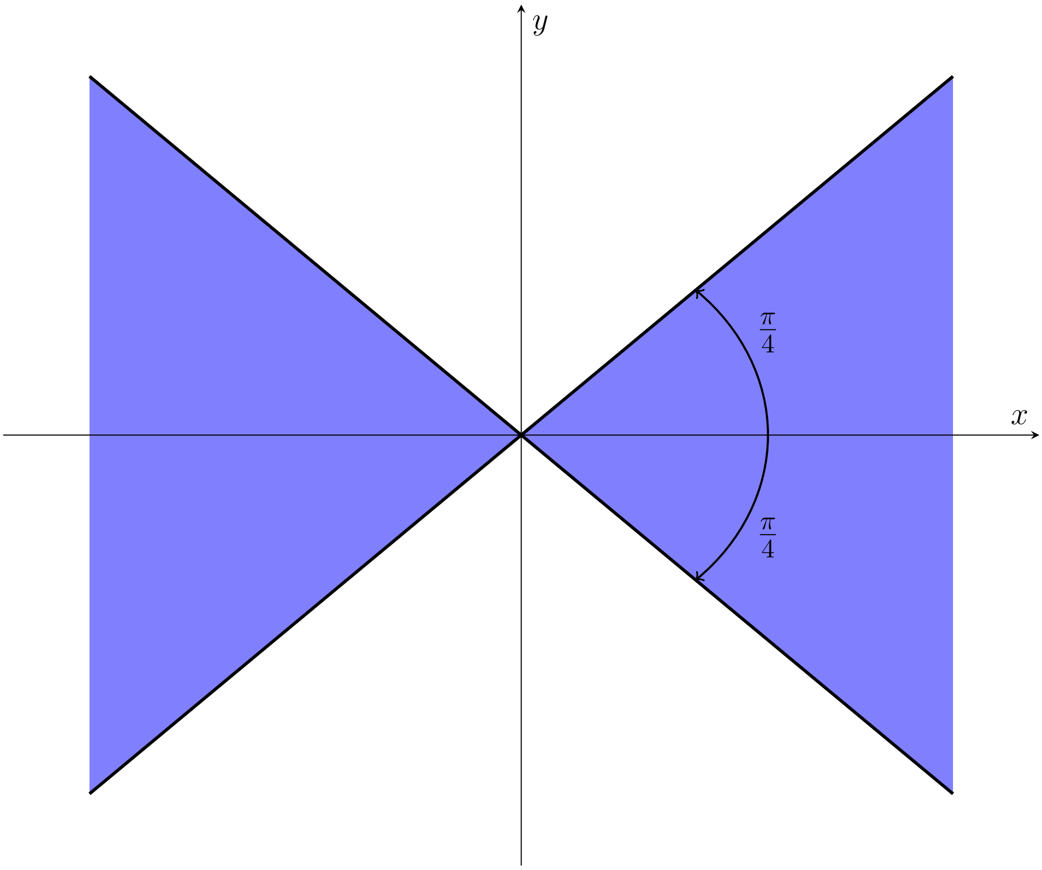
$$\mathrm{Re}(z^2) \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos 2\phi \geqslant 0.$$

Wystarczy teraz rozwiązać ostatnią nierówność w dowolnym przedziale o długości 2π. Mamy

$$\cos 2\phi \geqslant 0 \wedge \phi \in \langle -\pi/2, 3\pi/2) \qquad \iff \qquad \phi \in \langle -\pi/4, \pi/4\rangle \cup \langle 3\pi/4, 5\pi/4\rangle.$$

Oznacza to, że w rozważanym zbiorze znajdują się te i tylko te liczby, których argument zawiera się w zbiorze

$$\langle -\pi/4, \pi/4\rangle \cup \langle 3\pi/4, 5\pi/4\rangle.$$



Zadanie 7.12. Wyznaczyć zbiory

a) $\sqrt{4i-3}$,

b) $\sqrt[3]{8}$,

c) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$,

d) $\sqrt[3]{(1-i)^6}$,

e) $\sqrt[3]{2i}$,

f) $\sqrt[3]{2-2i}$,

g) $\sqrt[3]{1+i}$,

h) $\sqrt{(3-5i)^2}$,

i) $\sqrt[3]{(1+i)^6}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Z definicji pierwiastka zespolonego mamy

$$\sqrt{4i-3} = \{z \in \mathbb{C}\colon z^2 = 4i-3\}.$$

Jeżeli zapiszemy

$$z = x + iy,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$z^2 = 4i - 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - y^2 + 2ixy = 4i - 3.$$

Ostatnia równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = -3, \\ 2xy & = 4. \end{cases}$$

Rozwiążemy teraz ten układ równań. Możemy (dlaczego?) założyć, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$, co powoduje, że

$$y = \frac{2}{x},$$

a w konsekwencji

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3,$$

co jest równoważne (dlaczego?) równości

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

Jest to równanie dwukwadratowe, więc podstawiając

$$t = x^2,$$

otrzymujemy

$$t^2 + 3t - 4 = 0,$$

czyli

$$(t-1)(t+4) = 0,$$

co implikuje $x^2 = 1$ lub $x^2 = -4$. Druga równość nie może zajść, ponieważ x jest liczbą rzeczywistą. Widzimy zatem, że

$$x = 1 \qquad \text{lub} \qquad x = -1$$

i odpowiednio

$$y = 2 \qquad \text{lub} \qquad x = -2.$$

Ostatecznie
$$\sqrt{4i-3}=\{1+2i,1-2i\}.$$

e) W tym przypadku wygodnie będzie posłużyć się postacią trygonometryczną liczby zespolonej i, a następnie wykorzystać jawne wzory na pierwiastki zespolone. Mamy
$$2i=2\Big(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\Big),$$
więc
$$\sqrt[3]{2i}=\{z_0,z_1,z_2\},$$
gdzie
$$z_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\qquad k=0,1,2.$$
Wstawiając kolejne wartości k, otrzymujemy
$$\begin{aligned}
z_0&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\Big)=\sqrt[3]{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\Big),\\
z_1&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\Big)=\sqrt[3]{2}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\Big),\\
z_2&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\Big)=-i\sqrt[3]{2}.
\end{aligned}$$
Ostatecznie
$$\sqrt[3]{2i}=\left\{\sqrt[3]{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\Big),\sqrt[3]{2}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\Big),-i\sqrt[3]{2}\right\}.$$

Zadanie 7.13. Rozwiązać w liczbach zespolonych równania

a) $|z|+z=8+4i$,

b) $|z|-z=8+12i$,

c) $(z+i)^3=z^3$,

d) $(z-i)^4=(z+i)^4$,

e) $(z+1)^n=(z-1)^n$, dla dowolnej liczby naturalnej n,

f) $z^7=\overline{z}$,

g) $(\overline{z})^6=4|z^2|$,

h) $\dfrac{|z|^2z}{(\overline{z})^3}=-1$.

Przykładowe rozwiązania:

c) Liczba zespolona $z = 0$ nie jest rozwiązaniem rozważanego równania, więc

$$(z+i)^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(z+i)^3}{z^3} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{z+i}{z}\right)^3 = 1.$$

Podstawiając $w = \frac{z+i}{z}$, ostatnie równanie przyjmuje postać

$$w^3 = 1.$$

Rozwiązaniami tego równania są pierwiastki stopnia trzeciego z 1, więc (sprawdzić!)

$$w = 1 \qquad \text{lub} \qquad w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{lub} \qquad w = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wracając do zmiennej z, otrzymujemy

$$\frac{z+i}{z} = 1 \qquad \text{lub} \qquad \frac{z+i}{z} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{lub} \qquad \frac{z+i}{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pierwsze równanie jest sprzeczne, więc zajmijmy się drugim. Mamy

$$2z + 2i = (-1 + i\sqrt{3})z,$$

czyli

$$z(3 - i\sqrt{3}) = -2i,$$

co jest równoważne

$$z = -\frac{2i}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{6}.$$

Analogicznie znajdujemy drugie rozwiązanie

$$z = -\frac{\sqrt{3} + 3i}{6}.$$

Ostatecznie zbiorem rozwiązań rozważanego równania jest zbiór

$$\left\{\frac{\sqrt{3} - 3i}{6}, -\frac{\sqrt{3} + 3i}{6}\right\}.$$

Zadanie 7.14. Wykazać, że $\sqrt[n]{z} \cup \sqrt[n]{-z} = \sqrt[2n]{z^2}$.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

ĆWICZENIA 8. Wykonywanie działań na macierzach. Obliczanie wyznaczników.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności wykonywania działań na macierzach oraz obliczania wyznaczników.

Zakres tematyczny zajęć:

- Działania na macierzach.
- Wyznacznik macierzy.
- Rozwinięcie Laplace'a.
- Własności wyznaczników.

Pytania kontrolne:

a) Jak wyglądają podstawowe działania na macierzach?

b) Czym jest wyznacznik macierzy?

c) Jak wygląda wzór Laplace'a?

d) Jak wykorzystać własności wyznaczników?

Zadanie 8.1. Wykonać podane działania

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix}$,

f) $2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 8.2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykonać (jeśli to możliwe) działania: $B + C^T$, $3C - B^T$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^3.

Zadanie 8.3. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć

a) CAB,

b) $5B^2 + CA$,

c) $C^T B - 5A$,

d) $2A - (BC)^T$.

Zadanie 8.4. Wyznaczyć macierz

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\right)^{20}.$$

Wskazówka: Wyznaczyć najpierw

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8.5. Rozwiązać układ równań macierzowych:

a) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ -4X + 2Y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$

Przykładowe rozwiązania:

a) Z pierwszego równania możemy wyznaczyć

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - X.$$

Wstawiając do drugiego równania, otrzymujemy

$$-4X + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli

$$-2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

skąd

$$X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

W konsekwencji
$$Y = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8.6. Obliczyć wyznaczniki

a) $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 3-\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Zadanie 8.7. Wykorzystując rozwinięcie Laplace'a, obliczyć wyznaczniki

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$,

f) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Rozwijając wyznacznik względem drugiego wiersza, otrzymujemy
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 27 + 7 = 34.$$

Zadanie 8.8. Wykorzystując własności wyznaczników, obliczyć

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$,

f) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 1 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 1 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 1 \end{vmatrix}$,

h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$,

i) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$,

j) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \xlongequal[k_3-k_2]{k_4-k_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \\ 9 & 10 & 1 & 1 \\ 13 & 14 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

przy czym ostatnia równość wynika z faktu, że dwie kolumny są identyczne.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

g) Oznaczmy przez n liczbę wierszy tej macierzy. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 1 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 1 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{w_{n-1}-w_{n-2} \\ \dots \\ w_2-w_1}}{\overset{w_n-w_{n-1}}{===}} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 4 & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{k_{n-2}+k_{n-1} \\ \dots \\ k_1+k_2}}{\overset{k_{n-1}+k_n}{===}} \begin{vmatrix} 5n-4 & 5\cdot(n-1) & 5\cdot(n-2) & \dots & 10 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (5n-4)\cdot(-4)^{n-1}.$$

Zadanie 8.9. Niech A i B będą macierzami kwadratowymi stopnia 2. Wyznaczyć $\det(A)$ i $\det(A^2\cdot B)$, jeżeli wiadomo, że $(2A)^T = -B^2$ i $\det(B) = 6$.

Zadanie 8.10. Niech A i B będą macierzami kwadratowymi. Wyznaczyć $\det[(A\cdot B)^2]$ jeśli $A\cdot A^T = I$ i $\det(B) = 2$.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

ĆWICZENIA 9. Wyznaczanie macierzy odwrotnej oraz rzędu macierzy.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności odwracania macierzy metodą Gaussa oraz „wyznacznikową”.

Zakres tematyczny zajęć:

- Macierz odwrotna.
- Algorytm Gaussa.
- Wzór na macierz odwrotną.
- Rząd macierzy.

Pytania kontrolne:

a) Czym jest macierz odwrotna?

b) Jak wyglądają kolejne kroki algorytmu Gaussa?

c) Jak wygląda wzór na macierz odwrotną w terminach wyznaczników?

d) Jaka jest definicja rzędu macierzy?

Zadanie 9.1. Wykorzystując algorytm Gaussa, znaleźć macierz odwrotną do macierzy

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Wykonując kolejne kroki algorytmu Gaussa, otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right].$$

W konsekwencji

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

f) Mamy

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-2w_2]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3-5w_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_1-w_3]{w_2-w_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 5/2 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_2\cdot(-1)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 5/2 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1-2w_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 7/2 & -11/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{array}\right],$$

więc

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & -11/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9.2. Obliczyć $\det A$, $\det B$, $\det A \cdot B$ oraz $\det A^{-1}$ dla

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9.3. Wiadomo, że $B = 2A$ i $A \cdot B = I$, a macierze A i B są nieosobliwe i stopnia 4. Wyznaczyć $\det(A^{-1})$.

Zadanie 9.4. Obliczyć rzędy następujących macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$,

j) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

Przykładowe rozwiązania:

e) Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3+w_1]{w_2-3w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{w_3+w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\cancel{w_3}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

co oznacza, że rząd rozważanej macierzy jest równy 2.

Zadanie 9.5. W zależności od wartości rzeczywistego parametru λ wyznaczyć rzędy macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \\ \lambda+2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Przykładowe rozwiązania:

a) Dla $\lambda = 0$ macierz przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i jak łatwo sprawdzić, jest to macierz rzędu 2. Załóżmy zatem, że $\lambda \neq 0$. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\lambda \neq 0,$$

to rozważana macierz ma rząd nie mniejszy niż 2. Sprawdźmy zatem, kiedy macierz ta ma rząd większy niż 2. Aby tak się stało wyznacznik macierzy musi być różny od zera. Mamy

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{vmatrix} & \overset{w_2-3w_1}{\underset{w_3-\lambda w_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -3\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ & = -3\lambda(1-\lambda) - \lambda(1+\lambda) \\ & = -\lambda(3-3\lambda+1+\lambda) \\ & = -2\lambda(2-\lambda). \end{aligned}$$

Oznacza to, że dla $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq 2$ macierz ma rząd 3, a dla $\lambda = 0$ lub $\lambda = 2$ ma rząd 2.

ĆWICZENIA 10. Rozwiązywanie układów równań liniowych.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności rozwiązywania układów równań.

Zakres tematyczny zajęć:

- Układ Cramera.
- Twierdzenie Kroneckera-Capellego.
- Metoda eliminacji Gaussa.

Pytania kontrolne:

a) Jak rozwiązywać układ równań metodą Cramera?

b) Jak brzmi twierdzenie Kroneckera-Capellego?

c) Jak wyglądają kolejne kroki eliminacji Gaussa?

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 10.1. Znaleźć wszystkie wartości parametru λ, dla których poniższy układ równań jest układem Cramera:

a) $\begin{cases} 6\lambda^2 x - 3y = 3\lambda, \\ 2x - \ \ y = 7, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 3z = \lambda x, \\ 3x + y + 3z = \lambda y, \\ 3x + 3y + z = \lambda z. \end{cases}$

Przykładowe rozwiązania:

a) Wystarczy sprawdzić, dla jakich wartości parametru λ wyznacznik macierzy głównej tego układu jest różny od zera. Mamy

$$\begin{vmatrix} 6\lambda^2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6\lambda^2 + 6 = 6(1 - \lambda^2),$$

więc rozważany układ równań jest układem Cramera wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lambda \neq 1 \qquad \text{i} \qquad \lambda \neq -1.$$

Zadanie 10.2. Rozwiązać następujące układy równań metodą Cramera:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3, \\ x + 2y + z = 0, \\ x + y + 2z = 9, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ -x + y + z = 0, \\ x - y + z = 2, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 3x + y + z = 2, \\ x - 5z = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \\ 3x + y + 2z = 2. \end{cases}$

Zadanie 10.3. Wykorzystując macierz odwrotną do macierzy układu, znaleźć rozwiązania układów równań:

a) $\begin{cases} x + 7y = 2, \\ 2x - y = 9, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -7, \\ 3x + y + 4z = 5, \\ 2x + 5y + z = 18. \end{cases}$

Wskazówka: a) Zauważmy, że rozważany układ równań jest równoważny równaniu macierzowemu

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Wystarczy teraz pomnożyć obustronnie (z lewej strony) przez macierz odwrotną do macierzy układu, co prowadzi do

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10.4. Określić liczbę rozwiązań oraz parametrów w poniższych układach równań:

a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1, \\ 3x + y + z - t = 2, \\ 5x - y + 5z + t = 4, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 1, \\ x - y - z + 3t = 2, \\ 3x + 5y - 4z - t = 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 1, \\ x + 3y + 4z = 2, \\ 3x + 2y + z = 3, \end{cases}$

d) $\begin{cases} y + z + 3t = 0, \\ 2x + y - z - 3t = 2, \\ x - 2y + z + 2t = -1, \\ 2x + 3y + z + 3t = 1. \end{cases}$

Przykładowe rozwiązania:

b) Macierz rozszerzona rozważanego układu równań ma postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Wykonując operacje elementarne na wierszach sprowadzamy ją do postaci pozwalającej wyznaczyć rząd macierzy (zarówno macierzy układu jak i macierzy rozszerzonej):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 8 & 2 & -10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\cancel{w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & 1 & -5 & -3 \end{array}\right].$$

Rząd macierzy oraz macierzy rozszerzonej jest zatem równy 2. Ponieważ w układzie występują 4 niewiadome, to na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $4 - 2 = 2$ parametrów.

Zadanie 10.5. W zależności od wartości rzeczywistego parametru λ określić liczbę rozwiązań układów równań:

a) $\begin{cases} 2x - y + z + t = 1, \\ x + 2y - z + 4t = 2, \\ x + 7y - 4z + 11t = \lambda, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \lambda y + z = 1, \\ 2x + y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$

Wskazówka: Wyznaczyć rząd macierzy układu i macierzy rozszerzonej w terminach zmiennej λ, a następnie zastosować twierdzenie Kroneckera-Capellego.

Zadanie 10.6. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} x + z + t = -1, \\ 2x - y + t = 3, \\ x + y + 3z + 2t = 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + t = 4, \\ x + 2y - z = 3, \\ x - y + z + t = 1, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -7, \\ 3x + y + 4z = 5, \\ 2x + 5y + z = 18, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 4x + 8y - 7z + t = 1, \\ x + 2y - z + t = 1, \\ -x + y + 4z + 6t = 0, \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y - z + t = 1, \\ y + 3z - 3t = 1, \\ x + y + z - t = 1, \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y - z - t = 1, \\ x + y + z + 3t = 2, \\ 3x + 5y - z + t = 3, \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ x - y = -3, \\ 3x - y - 2z = -6, \\ 2y - 2z = 3, \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ 3x - y + 3z = 2, \\ x + y + z = 0, \\ x - y + z = 1, \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t - u = 6, \\ 3x + 6y + 5z - 2t - 9u = 1, \\ 2x + 4y + 2z - 8u = -5, \\ 2x + 4y + 7z - 5t + u = 17, \\ x + 2y + 6z - 5t - 10u = 12. \end{cases}$

Przykładowe rozwiązania:

a) Macierz rozszerzona układu równań jest postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Wykonując operacje elementarne na wierszach, otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3+w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{array}\right].$$

Oznacza to, że rząd macierzy układu jest równy 2, a rząd macierzy rozszerzonej jest równy 3. Na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego układ równań jest sprzeczny (nie ma żadnych rozwiązań).

b) Macierz rozszerzona układu równań jest postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Wykonując operacje elementarne na wierszach, otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\cancel{w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_2\cdot(-\frac{1}{3})} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right].$$

Rząd macierzy i macierzy rozszerzonej jest równy 2, więc układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $4-2=2$ parametrów. Za parametry przyjmiemy zmienne z i t. Ostatnia macierz jest macierzą rozszerzoną układu równań

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}t = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Z drugiego równania możemy wyliczyć y, otrzymując

$$y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}t.$$

Wstawiając teraz y do pierwszego równania, dostajemy

$$x = 3 - 2y + z = 3 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}z - \frac{2}{3}t + z = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t.$$

Ostatecznie rozwiązania wyjściowego równania możemy zapisać w postaci

$$\begin{cases} \quad x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t, \\ \quad y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}t, \\ z, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ĆWICZENIA 11. Działania na wektorach.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności wykonywania podstawowych operacji na wektorach w przestrzeni trójwymiarowej.

Zakres tematyczny zajęć:

- Iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany wektorów.

Pytania kontrolne:

a) Jakie są definicje iloczynów skalarnego, wektorowego i mieszanego?

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 11.1. Wyznaczyć długości wektorów:

a) $\vec{v} = (1, 0, 1)$,

b) $\vec{v} = (\sqrt{2}, -1, 3)$,

c) $\vec{v} = (-1, 3, \sqrt{6})$,

d) $\overrightarrow{PQ}$ dla $P(2, -1, 3)$ i $Q(-2, -2, 3)$,

e) $\overrightarrow{PQ}$ dla $P(1, 3, 0)$ i $Q(4, -2, 1)$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Z definicji
$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

d) Mamy
$$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 3) - (-2, -2, 3) = (4, 1, 0),$$
więc
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{17}.$$

Zadanie 11.2. Wyznaczyć iloczyny skalarne podanych wektorów:

a) $\vec{v} = (2, -1, 1)$, $\vec{w} = (4, 1, -2)$,

b) $\vec{v} = (1, -1, 0)$, $\vec{w} = (0, 3, 2)$,

c) $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{w} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$,

d) $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Mamy
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 5.$$

Zadanie 11.3. Znaleźć kąt między podanymi wektorami:

a) $\vec{v} = (1, 0, -1)$, $\vec{w} = (1, 1, 0)$,

b) $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{w} = (-1, 3, 1)$,

c) $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{w} = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$.

Przykładowe rozwiązania:

Wykorzystamy wzór
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \phi,$$
gdzie ϕ jest kątem między wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

a) Mamy
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1$$
oraz
$$|\vec{v}| = \sqrt{2}, \qquad |\vec{w}| = \sqrt{2}.$$
Wynika stąd, że
$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$
co implikuje, że kąt między wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy $\frac{\pi}{3}$.

Zadanie 11.4. Wyznaczyć rzut prostopadły wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{w}$, gdzie

a) $\vec{v} = (3, -1, 1)$, $\vec{w} = (1, 1, 2)$,

b) $\vec{v} = (-2, -1, -1)$, $\vec{w} = (-1, 2, 2)$.

Przykładowe rozwiązania:

Zauważmy, że rzut prostopadły wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{w}$ jest pewnym wektorem $\vec{u}$ postaci
$$\vec{u} = c\vec{w},$$
gdzie c jest odpowiednią stałą. Aby $\vec{u}$ był rzutem prostopadłym musi zachodzić warunek (dlaczego?)
$$\sphericalangle(\vec{v} - \vec{u}, \vec{w}) = 0$$
lub równoważnie
$$(\vec{v} - c\vec{w}) \cdot \vec{w} = 0.$$
Lewa strona ostatniej równości przyjmuje postać
$$\vec{v} \cdot \vec{w} - c(\vec{w} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w} - c|\vec{w}|^2.$$
Stąd otrzymujemy
$$c = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2},$$
a w konsekwencji
$$\vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w},$$
o ile tylko wektor $\vec{w}$ nie jest wektorem zerowym.

a) Z wyprowadzonego wzoru rzut prostopadły wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{w}$ jest równy
$$\vec{u} = \frac{(3, -1, 1) \cdot (1, 1, 2)}{|(1, 1, 2)|^2}(1, 1, 2) = \frac{4}{6}(1, 1, 2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Zadanie 11.5. Wyznaczyć długość rzutu prostopadłego wektora

$$\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

na prostą w płaszczyźnie Oxy, która tworzy jednakowe kąty z dodatnimi półosiami Ox i Oy.

Zadanie 11.6. Wyznaczyć iloczyny wektorowe podanych wektorów:

a) $\vec{v} = (1, 0, 2)$, $\vec{w} = (-1, 3, 1)$,

b) $\vec{v} = (4, -1, 1)$, $\vec{w} = (3, 2, -1)$,

c) $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{w} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Mamy

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - \vec{j}(1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) + \vec{k}(1 \cdot 3 - 0 \cdot (-1)) =$$

$$= -6\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} = (-6, -3, 3).$$

Zadanie 11.7. Wyznaczyć pole trójkąta rozpiętego przez wektorach

$$\vec{v} = (2, 1, -3), \qquad \vec{w} = \vec{i} - 3\vec{k}.$$

Wskazówka: Długość iloczynu wektorowego dwóch danych wektorów jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez te wektory.

Zadanie 11.8. Wyznaczyć odległość punktu $P(3, 2, 1)$ od prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0, 0)$ i równoległej do wektora $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia Pitagorasa i zadania 10.4.

Zadanie 11.9. Wyznaczyć iloczyny mieszane podanych wektorów:

a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 2, 0)$, $\vec{w} = (0, 3, 1)$,

b) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Przykładowe rozwiązania:

a) Iloczyn mieszany dany jest wzorem

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 11.10. Wyznaczyć objętość równoległościanu oraz czworościanu rozpiętego na wektorach

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \qquad \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Zadanie 11.11. Sprawdzić, czy punkty

$$P(1,3,2), \qquad Q(4,1,-2), \qquad R(2,-1,-2), \qquad S(-2,-1,0)$$

leżą na wspólnej płaszczyźnie.

Wskazówka: Wykorzystać fakt, że trzy wektory są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn mieszany jest równy zero.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

ĆWICZENIA 12. Wyznaczanie równań prostych i płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności posługiwania się różnymi reprezentacjami prostych i płaszczyzn w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zakres tematyczny zajęć:

- Równanie ogólne, normalne i parametryczne płaszczyzny.
- Równanie parametryczne, kierunkowe i krawędziowe prostej.

Pytania kontrolne:

a) Jak wyglądają różne równania prostych i płaszczyzn w przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

Zadanie 12.1. Zapisać równania ogólne i parametryczne następujących płaszczyzn:

a) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P(1,2,-3)$ i jest prostopadła do wektora $\vec{n}=(1,-1,2)$,

b) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P(1,0,1)$, $Q(-1,2,1)$ i $R(-2,3,1)$,

c) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P(2,1,-1)$ i $Q(1,-1,1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny Oxz,

d) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P(-1,-1,2)$ i jest równoległa do wektorów $\vec{v}=(1,1,1)$ oraz $\vec{w}=(3,2,1)$,

e) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P(1,0,1)$ i jest równoległa do płaszczyzny

$$\pi\colon 2x+3y-z+6=0,$$

f) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P(1,-1,-1)$ i jest prostopadła do płaszczyzn

$$\pi_1\colon x+y+z-2=0, \qquad \pi_2\colon 3x-y+4z-15=0.$$

Przykładowe rozwiązania:

a) Wektor $\vec{n}$ jest wektorem normalnym rozważanej płaszczyzny. Dana jest ona zatem równaniem ogólnym

$$\pi\colon ((x,y,z)-(1,2,-3))\cdot(1,-1,2)=0,$$

czyli

$$\pi\colon (x-1,y-2,z+3)\cdot(1,-1,2)=0.$$

Ostatecznie

$$\pi\colon x-y+2z+7=0.$$

Aby wyznaczyć równanie parametryczne, należy znaleźć dwa wektory równoległe do płaszczyzny π. Wystarczy w tym celu zauważyć, że dowolny wektor jest równoległy do płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadły do wektora normalnego płaszczyzny. Wystarczy zatem znaleźć dwa niewspółliniowe wektory, które są prostopadłe do $\vec{n}$. Szukamy więc takich $\vec{v}$ i $\vec{w}$, że

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \qquad \text{i} \qquad \vec{w}\cdot\vec{n}=0$$

oraz

$$\vec{v}\times\vec{w}\neq 0.$$

Łatwo sprawdzić, że podane warunki spełniają na przykład wektory

$$\vec{v}=(2,-1,0), \qquad \vec{w}=(0,3,2).$$

Równanie parametryczne ma zatem postać

$$\pi : (x,y,z)=(1,2,-3)+s(2,-1,0)+t(0,3,2),$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} x = 1 + 2s, \\ y = 2 - s + 3t, \\ z = -3 + 2t, \end{cases}$$

dla $s, t \in \mathbb{R}$.

c) Płaszczyzna przechodzi przez punkty P i Q, więc jest równoległa do wektora $\overrightarrow{PQ} = (-1, -2, 2)$. Z drugiej strony, ponieważ płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny Oxz, to jest ona równoległa do wektora $\vec{v} = (0, 1, 0)$. Możemy zatem zapisać równanie parametryczne płaszczyzny w postaci

$$\begin{cases} x = 2 - s, \\ y = 1 - 2s + z, , \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

gdzie $s, t \in \mathbb{R}$. Ponadto wiemy, że wektorem normalnym jest wektor

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = (-2, 0, -1),$$

co powoduje, że równanie ogólne jest postaci

$$\pi\colon (x - 2, y - 1, z + 1) \cdot (-2, 0, -1) = 0,$$

czyli

$$\pi\colon -2x - z + 3 = 0.$$

Zadanie 12.2. Zapisać równania parametryczne i kierunkowe następujących prostych:

a) prosta przechodzi przez punkt $P(-1, 2, 1)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (4, -1, 2)$,

b) prosta przechodzi przez punkty $P(1, 1, -2)$ i $Q(2, 0, -3)$,

c) prosta przechodzi przez punkt $P(1, -2, 4)$ i jest prostopadła do płaszczyzny

$$\pi\colon 2x - y + 3z + 5 = 0,$$

d) prosta przechodzi przez punkt $P(1, 0, -1)$ i jest prostopadła do wektorów $\vec{v} = (0, 2, 1)$ i $\vec{w} = (3, -4, 1)$,

e) prosta jest przecięciem płaszczyzn

$$\pi_1\colon x - 2y + 3z - 4 = 0, \qquad \pi_2\colon x - z + 2 = 0.$$

Przykładowe rozwiązania:

a) Rozważana prosta ma równanie parametryczne postaci

$$l\colon (-1, 2, 1) + t(4, -1, 2),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Równoważnie

$$l\colon \begin{cases} x = -1 + 4t, \\ y = \ \ \ 2 - \ \ t, \\ z = \ \ \ 1 + 2t. \end{cases}$$

Równaniem kierunkowym tej prostej jest natomiast

$$l\colon \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

e) Prosta leży w obu płaszczyznach π_1 i π_2, więc jest prostopadła do wektorów normalnych $\vec{n}_1 = (1, -2, 3)$ i $\vec{n}_2 = (1, 0, -1)$ tych płaszczyzn. Oznacza to, że wektor kierunkowy $\vec{v}$ prostej może być wyznaczony ze wzoru

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 4, 2).$$

Pozostaje znaleźć dowolny punkt, który leży na tej prostej. Wystarczy w tym celu znaleźć dowolną trójkę (x, y, z) spełniającą

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = \ \ \ 4, \\ x \qquad\ \ - \ \ z = -2. \end{cases}$$

Na przykład dla $z = 0$ otrzymujemy

$$\begin{cases} x = -2, \\ y = -3. \end{cases}$$

Szukana prosta ma zatem równanie parametryczne

$$l\colon (x, y, z) = (-2, -3, 0) + t(2, 4, 2), \qquad t \in \mathbb{R}$$

oraz równanie kierunkowe

$$l\colon \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2}.$$

Zadanie 12.3. Dla prostej z punktu e) zadania 12.2 wyznaczyć dwie inne płaszczyzny, których przecięciem jest ta prosta.

Zadanie 12.4. Wyznaczyć punkt przecięcia:

a) prostych

$$l_1\colon \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}, \qquad l_2\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{4},$$

b) prostej l i płaszczyzny π, gdzie

$$l\colon \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}, \qquad \pi\colon x - y + z - 1 = 0.$$

Zadanie 12.5. Obliczyć odległość:

a) punktu $P = (1, 1, 2)$ od płaszczyzny

$$\pi\colon 2x + y - 3z - 5 = 0,$$

b) prostej l od płaszczyzny π, gdzie

$$l\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}, \qquad \pi\colon x - y + 1 = 0,$$

c) punktu $P = (-1, 1, 0)$ od prostej

$$l\colon \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1},$$

d) płaszczyzn równoległych

$$\pi_1\colon x - 2y + z - 1 = 0, \qquad \pi_2\colon -2x + 4y - 2z + 3 = 0,$$

e) prostych równoległych

$$l_1\colon \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}, \qquad l_2\colon \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{1},$$

f) prostych skośnych

$$l_1\colon \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}, \qquad l_2\colon \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}.$$

Przykładowe rozwiązania:

c) Napiszmy równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $(-1, 1, 0)$ i prostopadłej do prostej l. Ponieważ wektor kierunkowy prostej jest wektorem normalnym takiej płaszczyzny, to

$$\pi\colon x + 2y - z + D = 0,$$

gdzie D jest dobrane w ten sposób, że $(-1, 1, 0) \in \pi$. Mamy zatem

$$D = 1 - 2 + 0 = -1,$$

więc ostatecznie

$$\pi\colon x + 2y - z - 1 = 0.$$

Wyznaczmy teraz punkt przecięcia prostej l i płaszczyzny π. Taki punkt jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Musi zatem dla pewnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzić równość

$$t + 2(1 + 2t) - (-1 - t) - 1 = 0,$$

czyli $6t = -2$, skąd

$$t = -\frac{1}{3}.$$

Oznacza to, że punktem wspólnym prostej l i płaszczyzny π jest punkt $Q(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Wystarczy teraz obliczyć odległość punktu P od punktu Q.

Zadanie 12.6. Wyznaczyć kąt między prostą

$$l\colon \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1},$$

a płaszczyzną

$$\pi\colon x - y + z - 1 = 0.$$

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

ĆWICZENIA 13. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem przekształceń geometrycznych.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów umiejętności posługiwania się postacią macierzową podstawowych przekształceń płaszczyzny.

Zakres tematyczny zajęć:

- Translacja, jednokładność, obrót.
- Współrzędne jednorodne.

Pytania kontrolne:

a) Jak zapisać podstawowe przekształcenia płaszczyzny w postaci macierzowej?

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 13.1. Jaki jest obraz punktów $P(1,-3)$ i $Q(4,1)$ przy następujących przekształceniach:

a) przesunięciu o wektor $(-1,2)$,

b) jednokładności w skali -2,

c) skalowaniu w skali $(2,3)$,

d) skalowaniu w skali $(2,3)$ względem punktu $(2,1)$,

e) obrocie o kąt $\pi/3$,

f) obrocie o kąt $\pi/3$ względem punktu $(-1,1)$,

g) przesunięciu o wektor $(1,2)$, a następnie obrocie o kąt $\pi/4$,

h) obrocie o kąt $\pi/2$, a następnie skalowaniu w skali $(-2,2)$,

i) skalowaniu w skali $(-2,2)$, a następnie obrocie o kąt $\pi/2$,

j) skalowaniu w skali $(3,3)$, obrocie o kąt $\pi/6$ i przesunięciu o wektor $(2,-1)$.

Zadanie 13.2. Zapisać przekształcenia z zadania 13.1 w postaci macierzowej.

Przykładowe rozwiązania:

b) Jednokładność w skali -2 ma przedstawienie macierzowe

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Obrazy P' i Q' punktów P i Q możemy zatem wyznaczyć w następujący sposób:

$$P' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

oraz

$$Q' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie $P'(-2,6)$ i $Q'(-8,-2)$.

e) Macierzą obrotu o kąt $\pi/3$ jest macierz

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Wynika stąd, że

$$P' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-3}{2} \end{bmatrix}$$

i analogicznie wyznaczamy współrzędne punktu Q'.

Zadanie 13.3. Jaki jest obraz okręgu

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$$

przy jednokładności w skali -3 oraz skalowaniu w skali $(2, -1)$ względem punktu $(1, 3)$.

Rozwiązanie. Zbadamy obraz przy drugim przekształceniu. Skalowanie względem punktu $(1, 3)$ możemy zapisać jako złożenie trzech przekształceń:

- przesunięcie o wektor $(-1, -3)$,
- skalowanie w skali $(2, -1)$ względem początku układu współrzędnych,
- przesunięcie o wektor $(1, 3)$.

Wynika stąd, że dla punktu $P(x, y)$ rozważane skalowanie przekształci go na punkt $P'(x', y')$, gdzie

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-2 \\ -y+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ -y+6 \end{bmatrix}.$$

Wynika stąd, że każdy punkt okręgu

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$$

zostanie przekształcony na punkt krzywej o równaniu

$$(2x-1)^2 - 2(2x-1) + (-y+6)^2 - 6(-y+6) = 0$$

lub równoważnie

$$4x^2 - 8x + y^2 - 6y + 3 = 0.$$

Grupując odpowiednie składniki, otrzymujemy

$$4(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10.$$

Obrazem okręgu jest zatem elipsa

$$\frac{2(x-1)^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{10} = 1.$$

Zadanie 13.4. Wyznaczyć obraz prostej $x + 2y - 3 = 0$ przy obrocie o kąt $\pi/3$ względem punktu $(1, 1)$.

Zadanie 13.5. Wyznaczyć macierze wszystkich przekształceń z zadania 13.1 we współrzędnych jednorodnych.

ĆWICZENIA 14. Badanie własności krzywych stożkowych.

Cel ćwiczeń:
Nabycie przez studentów podstawowych wiadomości o krzywych stożkowych na płaszczyźnie.

Zakres tematyczny zajęć:

- Okrąg, elipsa, hiperbola, parabola.

Pytania kontrolne:

a) Jak wyglądają równania krzywych stożkowych na płaszczyźnie?

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 14.1. Wyznaczyć współrzędne środka i promień okręgu o równaniu

$$x^2 - 4x + y^2 + 6x - 3 = 0.$$

Zadanie 14.2. Wyznaczyć współrzędne środka oraz promień okręgu przechodzącego przez punkty

$$P(1,0), \qquad Q(-2,3), \qquad R(4,1).$$

Zadanie 14.3. Niech $l\colon x + y - 1 = 0$ i rozważmy cięciwę $\overrightarrow{PQ}$ okręgu

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

która jest zawarta w prostej l. Wyznaczyć równanie prostej prostopadłej do l i przechodzącej przez środek cięciwy $\overrightarrow{PQ}$.

Zadanie 14.4. Wyznaczyć równanie stycznej okręgu $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$ w punkcie $P(2 + 2\sqrt{2}, 0)$.

Zadanie 14.5. Znaleźć współrzędne środka i promień okręgu, których przechodzi przez punkt $P(3,2)$ i jest styczny do obu półosi dodatnich układu współrzędnych Oxy.

Zadanie 14.6. Na okręgu o równaniu $x^2+y^2-2y-2 = 0$ wyznaczyć punkt, który jest położony najbliżej prostej o równaniu $x - y - 2 = 0$.

Rozwiązanie. Przepiszmy równanie okręgu w postaci

$$x^2 + (y-1)^2 = 3.$$

Jest to okrąg o środku w punkcie $S(0,1)$ i promieniu $\sqrt{3}$. Poszukiwany punkt $P(p,q)$ musi zatem spełniać

$$\overrightarrow{SP} \perp \vec{v},$$

gdzie $\vec{v} = (1,1)$ jest wektorem kierunkowym prostej

$$x - y + 2 = 0.$$

Zachodzi zatem równość

$$(p, q-1) \cdot (1,1) = 0$$

lub równoważnie

$$p + q - 1 = 0,$$

czyli $q = 1 - p$. Z drugiej strony punkt $P(p, 1-p)$ musi leżeć na okręgu, więc

$$p^2 + (1 - p - 1)^2 = 3.$$

To oznacza, że $2p^2 = 3$, skąd

$$p = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \text{lub} \qquad p = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Wiemy zatem, że poszukiwanym punktem jest punkt o współrzędnych

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \qquad \text{lub} \qquad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Oczywiście jeden z nich leży najbliżej prostej, a drugi najdalej ze wszystkich punktów okręgu. Wystarczy wybrać ten, którego odległość od prostej jest mniejsza. Odległość pierwszego punktu od rozważanej prostej jest równa

$$\frac{|\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}},$$

a drugiego

$$\frac{|-\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Wynika stąd, że punkt $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{2}})$ jest punktem na okręgu położonym najbliżej prostej $x - y - 2 = 0$.

Zadanie 14.7. Dla elipsy o równaniu

$$25x^2 - 150x + 16y^2 + 32y - 159 = 0$$

wyznaczyć jej osie, ogniskową, mimośród, współrzędne środka i ognisk.

Zadanie 14.8. Wyznaczyć równania stycznych do elipsy

$$4x^2 + 36y^2 - 36 = 0,$$

które znajdują się w odległości równej 2 od środka tej elipsy.

Rozwiązanie. Środkiem tej elipsy jest punkt $S(0, 0)$. Przekształćmy równanie elipsy do postaci

$$\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1.$$

Równanie stycznej do elipsy w punkcie o współrzędnych (x_0, y_0) ma postać

$$\frac{(x_0 - 0)(x - 0)}{3^2} + (y_0 - 0)(y - 0) = 1,$$

czyli

$$4x_0x + 36y_0y = 36.$$

Ponieważ poszukiwane styczne mają znajdować się w odległości 2 od środka elipsy, to musi zachodzić

$$2 = \frac{|4x_0 \cdot 0 + 36y_0 \cdot 0 - 36|}{\sqrt{16x_0^2 + 81y_0^2}},$$

czyli

$$2\sqrt{16x_0^2 + 81y_0^2} = 36,$$

a po uproszczeniu

$$16x_0^2 + 81y_0^2 = 18^2.$$

Wystarczy zatem rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 4x_0^2 + 36y_0^2 = 36, \\ 16x_0^2 + 81y_0^2 = 18^2. \end{cases}$$

Zadanie 14.9. Znaleźć równania wspólnych stycznych do elips o równaniach

$$x^2 + 3y^2 = 3, \qquad 3x^2 + y^2 = 3.$$

Zadanie 14.10. Wyznaczyć równania stycznych do elipsy

$$(x-3)^2 + 2y^2 = 8,$$

które są równoległe do prostej $x + y - 1 = 0$.

Zadanie 14.11. Wyznaczyć równanie hiperboli o ogniskach

$$F_1(1,1), \qquad F_2(-2,1),$$

do której należy punkt $P(0, 1+2\sqrt{3})$.

Zadanie 14.12. Wyznaczyć ogniska, mimośród oraz asymptoty hiperboli o równaniu

$$x^2 - y^2 = 16.$$

Ponadto znaleźć równania stycznych do hiperboli, które przechodzą przez punkt $P(-1,-7)$, a na prawej gałęzi hiperboli wyznaczyć punkt, który leży najbliżej prostej $2x + y + 6 = 0$.

Zadanie 14.13. Wyznaczyć wszystkie parabole, które przechodzą przez punkty

$$P(-2,0), \qquad Q(1,3), \qquad R(6,-2).$$

Dla jednej z tych parabol napisać równanie stycznej w punkcie Q.

Zadanie 14.14. Dla hiperboli

$$y^2 = 12x$$

znaleźć równania stycznych prostopadłych do prostej $2x + y - 7 = 0$ oraz równania stycznych tworzących z prostą $4x - 2y + 9 = 0$ kąt $\frac{\pi}{4}$.

ĆWICZENIA 15. Kolokwium 2.

Cel ćwiczeń:
Sprawdzenie wiadomości studentów dotyczących podstawowych zagadnień algebry liniowej i geometrii analitycznej.

Zakres tematyczny zajęć:

- Materiał z ćwiczeń od 7 do 14.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zintegrowany Program Rozwoju Politechniki Lubelskiej - część druga

Materiały zostały opracowane w ramach projektu
„Zintegrowany Program Rozwoju Politechniki Lubelskiej – część druga",
umowa nr **POWR.03.05.00-00-Z060/18-00**
w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020
współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego