Problem optymalnego nawiasowania

Znaleźć optymalne nawiasowanie dla iloczynu

$$A_1 A_2 \ldots A_n.$$

$$C_n = \binom{2n}{n} \qquad \binom{2n-2}{n-1}$$

$$2$$

$$4^n$$

$$A_1 A_2$$

$$A_1 A_2 A_3 \quad (A_1 \cdot A_2) A_3 \quad A_1 (A_2 \cdot A_3)$$

$$\underbrace{(A_1 A_2)(A_3 A_4)}_{\checkmark}, \quad (\underbrace{((A_1 A_2) A_3)}_{\ast} A_4), \quad ((A_1 (A_2 A_3)) A_4) \quad \ldots$$

Własność optymalnej podstruktury

Twierdzenie

Optymalne rozwiązanie zagadnienia nawiasowania jest funkcją optymalnych rozwiązań podproblemów, to znaczy w optymalnym nawiasowaniu $A_1 \dots A_n$ każdy blok $A_i \dots A_j$ powinien być nawiasowany według optymalnego nawiasowania tego bloku.

$$A_1 \cdots \underbrace{(A_i \cdots A_j)} \cdots A_n$$

$$\Updownarrow$$

$$(((A_i) \cdots)(\;)A_j)$$

Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$

$k[2][5]$

AB $\quad n \cdot m \cdot k$

$n \times m \quad m \times k$

Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, $\ldots$, $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$
- $k[i][i] := 0$

Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$

$k[1][2]$, $k[2][3]$, ...

$k[1][3]$

- $k[i][i] := 0$

- $k[i][j] := \min_{i \leqslant m < j} \{ k[i][m] + k[m+1][j] + a_i a_{m+1} a_{j+1} \}$

$A_i \ldots A_m$ $\quad$ $A_{m+1} \ldots A_j$

$$\underbrace{(A_i \;\ldots\; A_m)}_{a_i \times a_{m+1}} \cdot \underbrace{(A_{m+1} \ldots A_j)}_{a_{m+1} \times a_{j+1}}$$

$A_1 A_2 A_3$ $\qquad$ $k[1][3]$

$(A_1 A_2) A_3 \qquad A_1 (A_2 A_3)$

$$k[1][3] = \min \left\{ \begin{array}{l} k[1][2] + k[3][3] + a_1 a_3 a_4, \\ k[1][1] + k[2][3] + a_1 a_2 a_4 \end{array} \right\}$$

$$k[1][4] = \min \left\{ \begin{array}{l} k[1][2] + k[3][4] + \ldots, \\ k[1][3] + k[4][4] + \ldots, \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, $\ldots$, $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$
- $k[i][i] := 0$
- $k[i][j] := \min_{i \leqslant m < j} \{k[i][m] + k[m+1][j] + a_i a_{m+1} a_{j+1}\}$
- $k[1][n]$ – rozwiązanie problemu

Ćw. Jak naprawdę postawić nawiasy?

Algorytmy dynamiczne

Podobne podejście można stosować do

- problemu plecakowego,
- problemu komiwojażera,
- obliczania odległości Levenshteina,
- ...

ALGORYTM GAUSSA

macierze odwrotne	wyznaczniki	układy równań	...

$A \in \mathbb{R}_{n \times n}$

$A I_n = I_n A = A$

I_n — 1

$ab = 1$

$b = a^{-1}$

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Def. Jeżeli dla macierzy $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ istnieje macierz $B \in \mathbb{R}_{n \times n}$ o tej własności, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

to A nazywamy macierzą <u>odwracalną</u>, a B <u>macierzą odwrotną</u> do A.

Piszemy wtedy

$$B = A^{-1}.$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Alg. Gaussa

$$\overset{n \times 2n}{\underbrace{\left[\, A \;\middle|\; I_n \,\right]}} \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} \underbrace{\left[\, I_n \;\middle|\; \underbrace{B}_{A^{-1}} \,\right]}$$

Operacje elementarne:

1) przestawienie dwóch wierszy,
2) pomnożenie jednego wiersza przez dowolną liczbę różną od 0,
3) dodanie do jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[u_3 - 2u_1]{u_2 - 2 \cdot u_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{u_2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6/5 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{u_3 + 6u_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6/5 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{21}{5}} & \frac{2}{5} & -6/5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{u_3 \cdot \frac{5}{21}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6/5 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{21} & \frac{-6}{21} & \frac{5}{21} \end{array}\right] \xrightarrow[u_1 - 2u_3]{u_2 - \frac{6}{5}u_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{21} & \frac{12}{21} & -\frac{10}{21} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 6/21 & 3/21 & -6/21 \\ 0 & 0 & 1 & 2/21 & -6/21 & 5/21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{u_1 - 2u_2} \left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 5/21 & 6/21 & 2/21 \\ 6/21 & 3/21 & -6/21 \\ 2/21 & -6/21 & 5/21 \end{array}}_{A^{-1}} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/21 & 6/21 & 2/21 \\ 6/21 & 3/21 & -6/21 \\ 2/21 & -6/21 & 5/21 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & -6 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1}$$

1) Optymalizacja

2) Wzór Taylora

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R(c)$$

$\frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arctg} x$

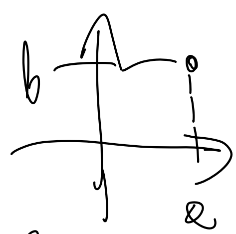
$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

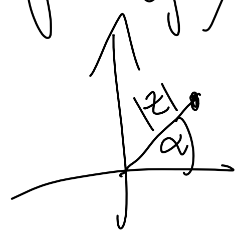
3) Zastosowanie całek geometryczne

$\underline{a>0}$ $f(x) = x^3 + ax^2$ $x \in \langle 0, 1 \rangle$

$V = g(a)$

4) L. zespolone (p. algebraiczna $\longleftrightarrow$ p. tryg.)





5) • Macierze przekształceń $\mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ • macierze obrotu

• macierz skalowania

• Macierze odwrotne (mnożenie macierzy)