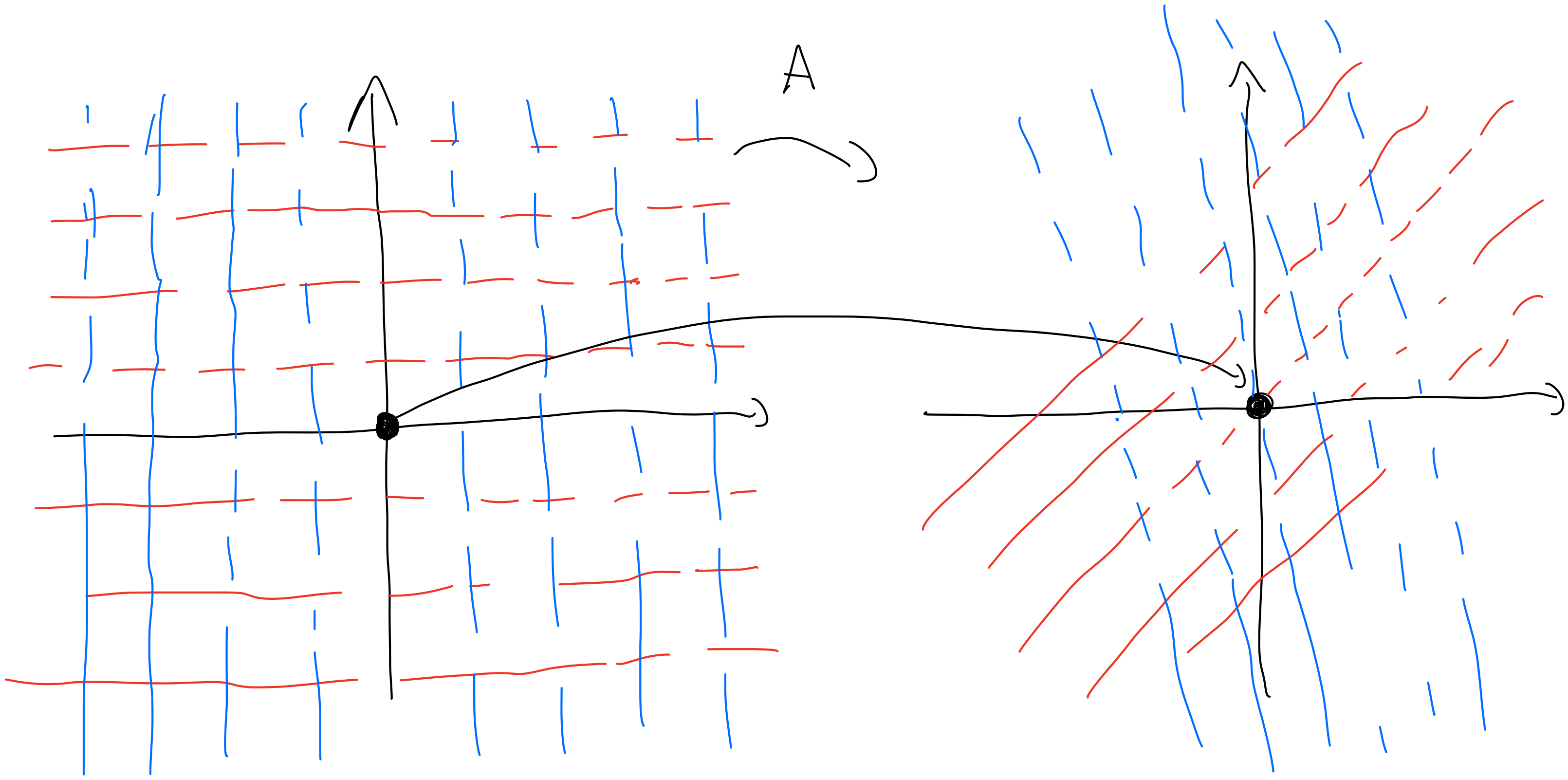
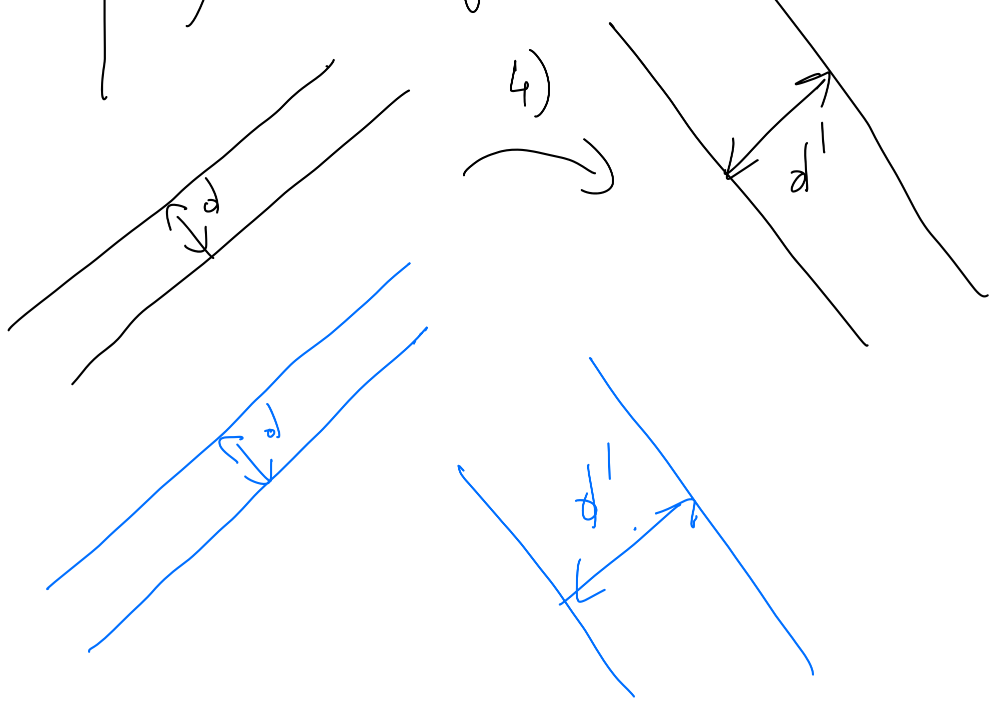


1) $0 \to 0$

2) proste → proste

3) proste równoległe → proste równoległe

4) zachowuje odl. między prostymi



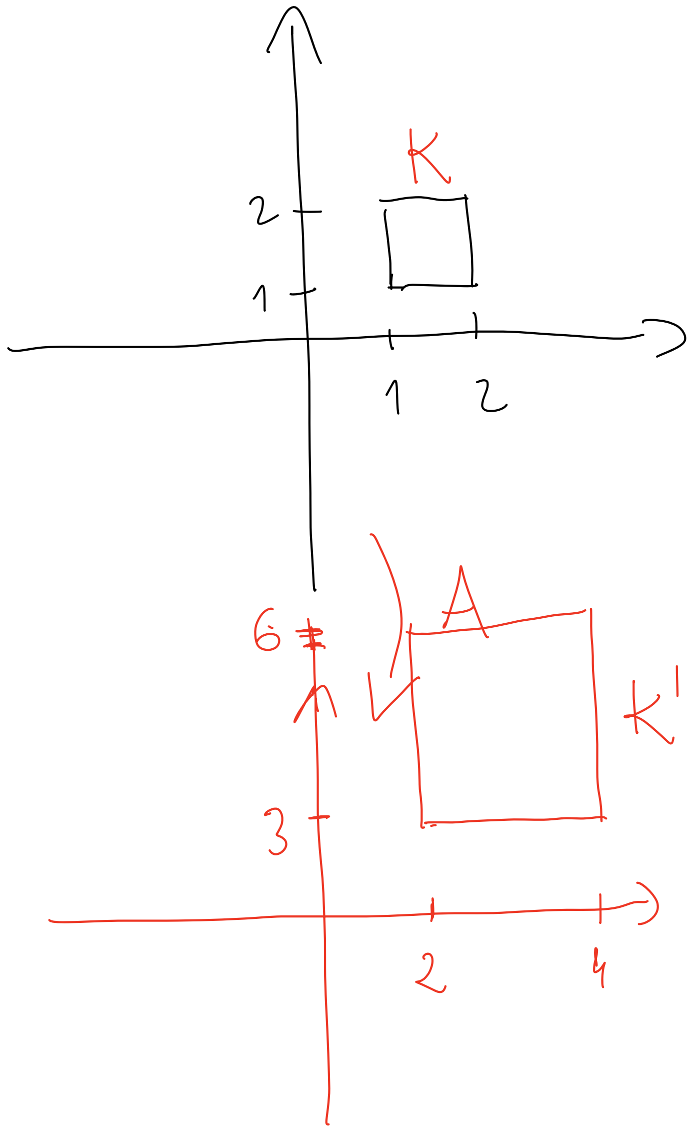
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A

$(1,0) \qquad (0,1)$

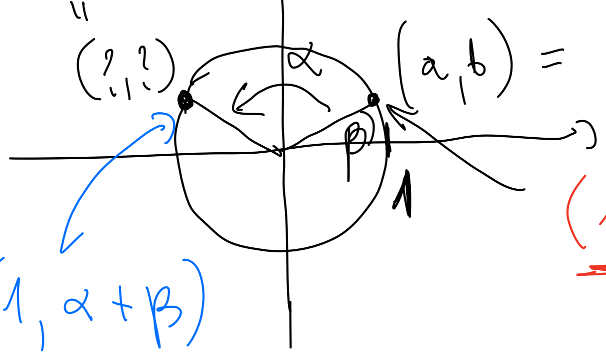


2) Obroty

$$\mathbb{C}: \quad \overset{\alpha}{z}\overset{\beta}{w} = |z||w|\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$
$=$
$(?,?)$

$(a,b) = a + bi = \cos\beta + i\sin\beta$

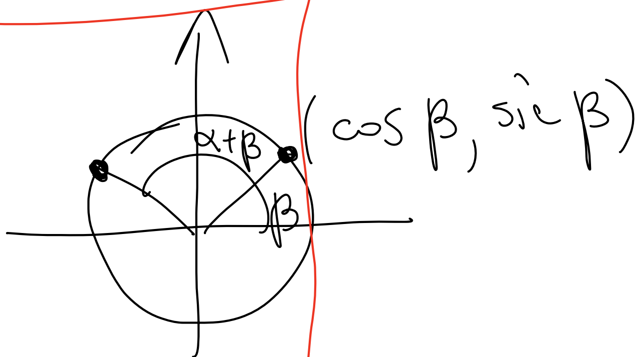


$$(\cos\beta + i\sin\beta)\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \underline{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\|$$

$$\left[\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right] + i\left[\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\right]$$

$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$



$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}(\cos\beta, \sin\beta)$$

$\cos\beta(1,0)$

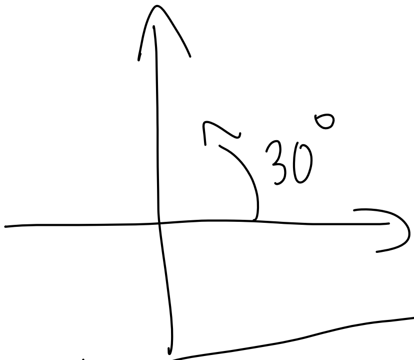
$$\|$$

$$\begin{bmatrix}\boxed{} & \end{bmatrix}(\cos\beta, 0) = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

$\sin\beta(0,1)$

$$\|$$

$$\begin{bmatrix} & \boxed{}\end{bmatrix}(0, \sin\beta)$$



$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$A \quad , \quad B \qquad A(B)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) = \quad C = [\,?\,]$$

$C = A(B)$ ← złożenie A z B

$$C(1,0) = A(B(1,0)) = A(e,g) =$$

$$= eA(1,0) + gA(0,1) =$$

$$= e(a,c) + g(b,d) =$$

$$= (ae, ce) + (bg, dg) =$$

$$= (ae+bg,\ ce+dg)$$

$$C(1,0) = A(B(1,0)) = A(e,g) =$$

$$= eA(1,0) + gA(0,1) =$$

$$= e(a,c) + g(b,d) =$$

$$= (ae, ce) + (bg, dg) =$$

$$= (ae+bg, ce+dg)$$

$$C = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$$C(0,1) = A(B(0,1)) = A(f,h) = fA(1,0)+hA(0,1)$$

$$= f(a,c) + h(b,d) =$$

$$= (af, cf) + (bh, dh) =$$

$$= (af+bh, cf+dh)$$

$A \quad , \quad B \qquad\qquad C = A(B)$

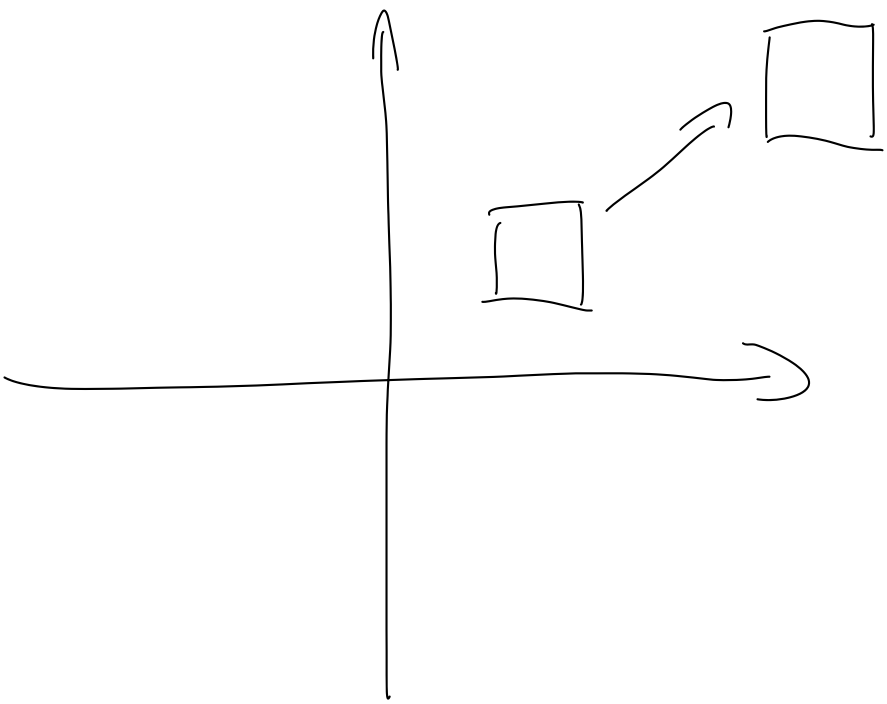
$[\quad] \; [\quad] \qquad\qquad [\;?\;]$

A – skalowanie $\times 3 \uparrow \quad \xrightarrow{\times 2}$

B – obrót o 30^0

$$C = A(B) = AB$$

$$C = \begin{bmatrix} \overset{a}{2} & \overset{b}{0} \\ \overset{c}{0} & \overset{d}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{e}{\frac{\sqrt{3}}{2}} & \overset{f}{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\,{}^{g} & \frac{\sqrt{3}}{2}\,{}^{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



Macierze

Macierzą wymiaru $n \times m$ (o n wierszach i m kolumnach) nazywamy tablicę liczb rzeczywistych/zespolonych

$A[2][4]$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\overset{m}{\cancel{n}}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\overset{m}{\cancel{n}}} \\ \vdots & \vdots & a_{ij}\ \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}}.$$

a_{24}

i – ty wiersz

j – ta kolumna

Piszemy również

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

lub

$$A = [a_{ij}].$$

$A \in \mathbb{R}_{n \times m}$ ← zbiór wszystkich macierzy wymiaru $n \times m$.

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Jeżeli $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ (czyli macierze A i B są dokładnie tego samego wymiaru), to definiujemy $A \pm B$ wzorem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1m} \pm a_{1m} \\ a_{21} \pm b_{21} & \dots & a_{2m} \pm b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Równoważnie

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

Niech $c \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1m} \\ ca_{21} & \dots & ca_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \dots & ca_{nm} \end{bmatrix}.$$

Równoważnie

$$cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}].$$

Własności

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $(cd)A = c(dA)$

+ przemienne

+ łączne

mnożenie przez liczbę jest rozdzielne względem dodawania macierzy

Mnożenie macierzy

Niech $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$. Definiujemy wtedy iloczyn $C = A \cdot B$ wzorem

$$C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}_{n\times k}, \qquad c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}.$$

m

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \qquad B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

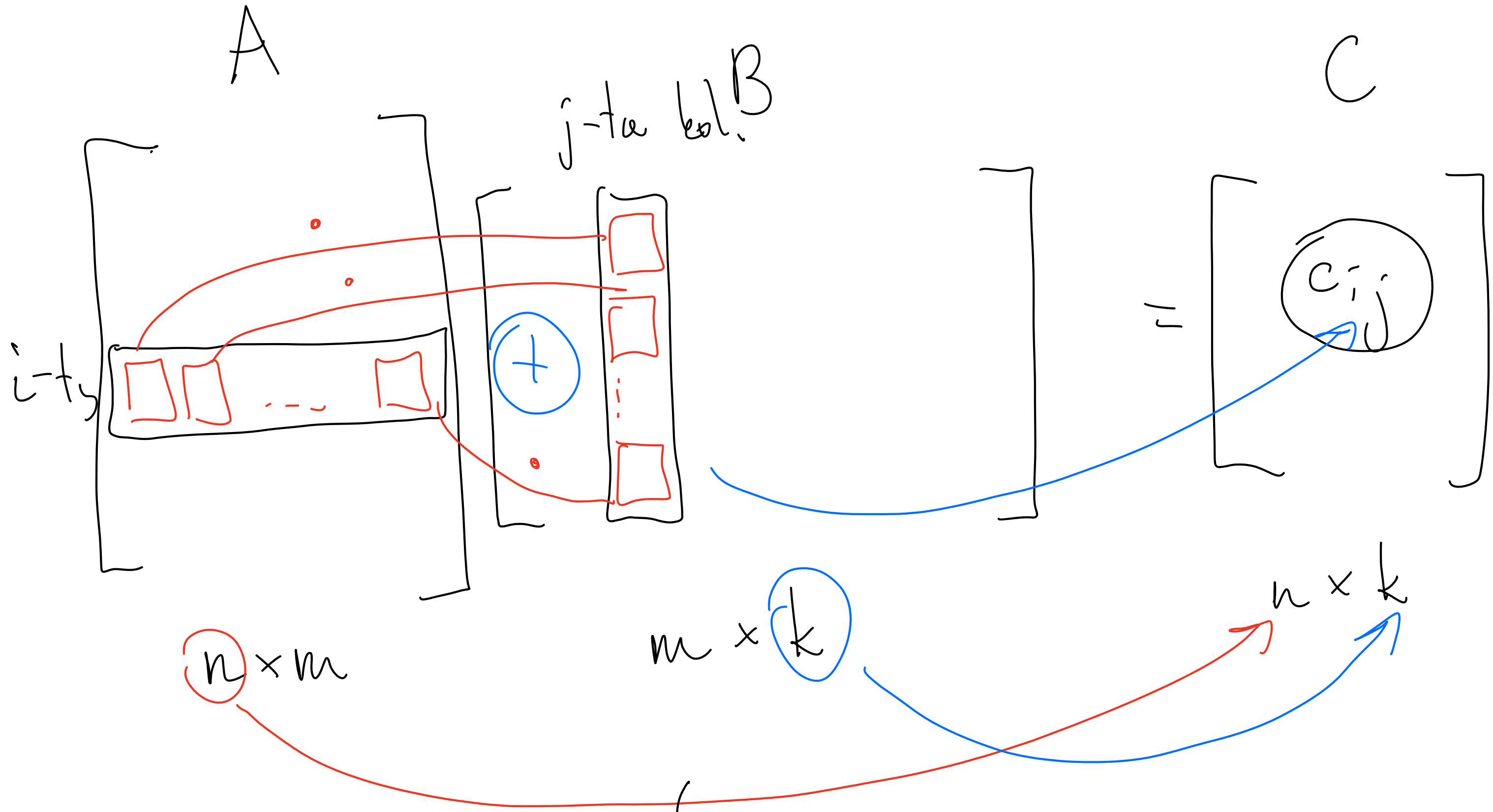
$A(B)$

i-ty wiersz A

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$$

$+$

$C = A \cdot B$



$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} \cdot b_{rj}$$

$A, B \in \mathbb{R}_{n\times n}$

$C = A \cdot B \in \mathbb{R}_{n\times n}$

n^2 el.

1 el. = n mnożeń

$C = n \cdot n^2 = n^3$ mnożeń

2024

1968 Strassen

n^2 $n^{2.37\ldots}$? $n^{2.5\ldots}$ n^3

ab
cd

1960 a, b $a \cdot b$ $n^2 \longrightarrow n^{\log_2 3}$

n-bitowe

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Ćwieczenie

Wykonać działania

$$2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Własności iloczynu

- $A(B + C) = AB + AC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B, C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $(A + B)C = AC + BC$ dla $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $c \in \mathbb{R}$
- $(AB)C = A(BC) = ABC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $C \in \mathbb{R}_{k\times \ell}$
- $AI_m = I_nA$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$

I_n - macierz jednostkowa

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}}_{n\times n}$$

$A \in \mathbb{R}_{n\times n}$

$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Uwagi

Mnożenie macierzy **nie jest** przemienne! Najczęściej $AB \neq BA$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B$

$\mathbb{R}_{n \times m} \cdot \mathbb{R}_{m \times k}$

$B \cdot A$

$\mathbb{R}_{m \times k} \cdot \mathbb{R}_{n \times m}$

?

Uwagi

$(AB)C = A(BC)$, ale jeden z iloczynów może być łatwiejszy do policzenia!

$$\underbrace{\left(\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix}3&1&1\end{bmatrix}}\right)}_{3\times 3}\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}, \qquad \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}\underbrace{\left(\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix}3&1&1\end{bmatrix}}\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}\right)}_{1\times 1}$$

9 m.

3×1

3·3=9 mn.

18 mn.

3 mn.

3×1

3 mn.

6 mn.

Liczba mnożeń

$A \in \mathbb{R}_{n \times m}$ $B \in \mathbb{R}_{m \times k}$

$A \cdot B$ $n \times k$ $n \cdot k \cdot m$

liczba mnożeń dla $A \cdot B$

Liczba mnożeń

Niech $A \in \mathbb{R}_{20\times 2}$, $B \in \mathbb{R}_{2\times 10}$, $C \in \mathbb{R}_{10\times 1}$.

Koszt obliczenia $(AB)C$:

$\rightsquigarrow$ AB: $20 \cdot 2 \cdot 10 = 400$ 20×10

$\rightsquigarrow$ $(AB)C$: $20 \cdot 10 \cdot 1 = 200$

$\Big\}$ 600

Koszt obliczenia $A(BC)$:

$\rightsquigarrow$ BC: $2 \cdot 10 \cdot 1 = 20$ 2×1

$\rightsquigarrow$ $A(BC)$: $20 \cdot 2 \cdot 1 = 40$

$\Big\}$ 60

Problem optymalnego nawiasowania

Znaleźć optymalne nawiasowanie dla iloczynu

$$A_1 A_2 \dots A_n.$$

$$C_n = \binom{2n}{n} \qquad \binom{2n-2}{n-1}$$

$$\approx 4^n$$

$$A_1 A_2$$

$$A_1 A_2 A_3 \quad (A_1 \cdot A_2) A_3 \quad A_1 (A_2 \cdot A_3)$$

$$(A_1 A_2)(A_3 A_4), \quad (((A_1 A_2) A_3) A_4), \quad ((A_1 (A_2 A_3)) A_4) \quad \dots$$