Pierwiastek zespolony

$a \geq 0$

$$\sqrt{a} = b \iff \underbrace{b^2 = a} \wedge b \geq 0$$

$$\sqrt{4} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -2 \end{array}$$

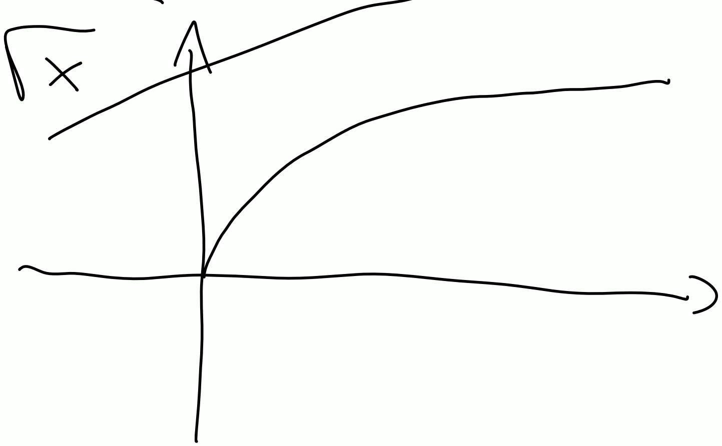
$a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{a} = b \iff b^3 = a$$

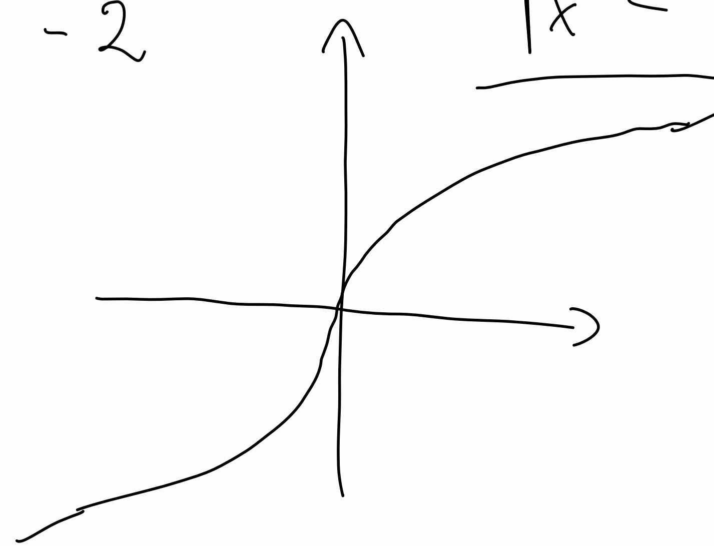
$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\overset{f^{-1}}{\sqrt{x}} \longleftrightarrow \overset{f}{x^2}$$



$$\underbrace{\overset{f^{-1}}{\sqrt[3]{x}} \longleftrightarrow \overset{f}{x^3}}$$



$z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$\cancel{\sqrt[n]{z} = w \iff w^n = z}$

$\sqrt[n]{z} = \{ w \in \mathbb{C} : w^n = z \}$

$\sqrt{4} = \{ 2, -2 \}$

$\sqrt{-1} = \{ i, -i \}$

$\sqrt[3]{1} = \{ 1, ? \}$ $\qquad \sqrt[3]{1} = \{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \}$

$$\sqrt{1+2i} = \{ w \in \mathbb{C} : w^2 = 1+2i \}$$

$w = x + iy \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}$

$1 + 2i = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$\alpha = ?$

$(x+iy)^2 = 1 + 2i$

$x^2 - y^2 + 2xyi = 1 + 2i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 2 \quad \Big| : x \neq 0 \end{cases}$$

$2y = \frac{2}{x} \iff y = \frac{1}{x}$

$x = 0$

$$\begin{cases} -y^2 = 1 \\ 0 = 2 \end{cases} \quad \text{sprz.}$$

$x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \quad \Big| \cdot x^2$

$y = \frac{1}{x}$

$x^4 - 1 = x^2$

$\boxed{x^4 - x^2 - 1 = 0} \quad \Big| \, t = x^2$

$t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \lor t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \lor x^2 = \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{<0}$

sprz.

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \lor x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} & x_0 \\ y = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} & y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \end{cases}$$

$$\sqrt{1+2i} = \{ x_0 + iy_0, -x_0 - iy_0 \}$$

Pierwiastek zespolony

Niech $z \in \mathbb{C}$. **Pierwiastkiem zespolonym** stopnia $n \geqslant 2$ z liczby z nazywamy **zbiór**

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \colon w^n = z\}.$$

Pierwiastek zespolony

Niech $z \in \mathbb{C}$. **Pierwiastkiem zespolonym** stopnia $n \geqslant 2$ z liczby z nazywamy **zbiór**

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \colon w^n = z\}.$$

Niech $z \neq 0$

$$\underbrace{z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).}$$

Wtedy

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\},$$

pierwiastek rzeczywisty

gdzie

$$z_k = \underbrace{\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)}$$

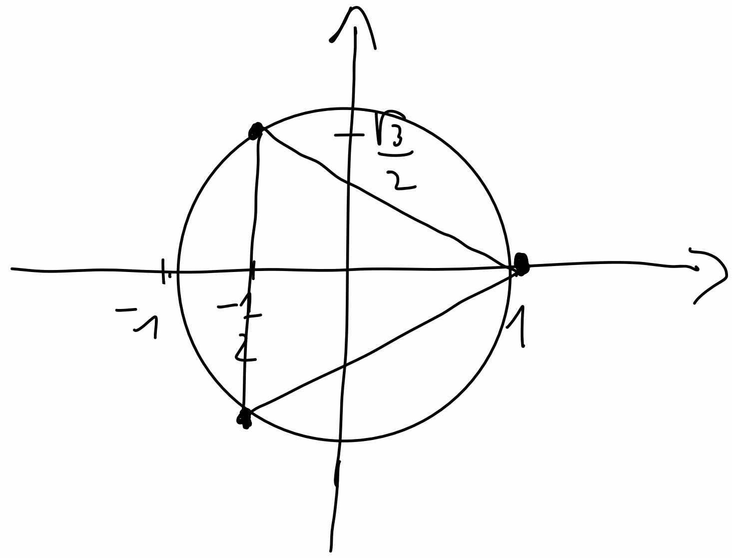
dla $\underline{k = 0, 1, \dots, n-1.}$

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)^n \left(\cos\left(\alpha + 2k\pi\right) + i\sin\left(\alpha + 2k\pi\right)\right) = |z|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$$

$$= z$$

Przykład

Wyznaczyć (zespolony) pierwiastek $\sqrt[3]{1}.$



$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\sqrt[3]{1} = \{z_0, z_1, z_2\}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\underbrace{\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3}}_{\frac{2}{3}\pi} + i\sin\underbrace{\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3}}_{\frac{2}{3}\pi}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\underbrace{\frac{0+2\cdot 2\cdot\pi}{3}}_{\frac{4}{3}\pi} + i\sin\underbrace{\frac{0+2\cdot 2\cdot\pi}{3}}_{\frac{4}{3}\pi}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Zasadnicze twierdzenie algebry

$x^2 + 1 = 0$

w $\mathbb{R}$ NIE

w $\mathbb{C}$ TAK

$x^{10} + 5x^8 + 3x^4 + x^2 + 1 = 0$

w $\mathbb{R}$ NIE

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

$(1, i)$

kwaterniony

$(1, i, j, k)$

$$ijk = i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie

Każdy wielomian stopnia $\geqslant 1$ ma pierwiastek zespolony.

o dowolnych współczynnikach zespolonych

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie

Każdy wielomian stopnia $\geqslant 1$ *ma pierwiastek zespolony.*

Twierdzenie

Każdy wielomian p *stopnia* $n \geqslant 1$ *ma dokładnie* n *pierwiastków zespolonych, to znaczy istnieją takie liczby zespolone* $z_1, z_2, \dots, z_n$*, że*

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Przykład

Rozwiązać równanie
$$x^2 + 2x + 2 = 0.$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \{2i, -2i\}$$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2} \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2}$$

$a \geq 0$

$\sqrt{-a} = \{\sqrt{a}\, i, -\sqrt{a}\, i\}$

$$x_1 = \frac{-2+2i}{2} \qquad x_2 = \frac{-2-2i}{2}$$

$$x_1 = -1 + i \qquad x_2 = -1 - i$$

$$x^2 + 2x + 2 = (x - (-1+i))(x - (-1-i))$$

ALGEBRA LINIOWA

Przekształcenie liniowe

$$A : V \to U$$

V — $\mathbb{R}^n$, U — $\mathbb{R}^m$

najczęściej $V = U = \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$

1) $\bigwedge\limits_{\bar{v},\bar{u}} A(\bar{v} + \bar{u}) = A(\bar{v}) + A(\bar{u})$

wektory

2) $\bigwedge\limits_{a,\bar{v}} A(a\bar{v}) = a A(\bar{v})$

liczba

$\Updownarrow$

1) $A(a\bar{v} + b\bar{u}) = a A(\bar{v}) + b A(\bar{u})$

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

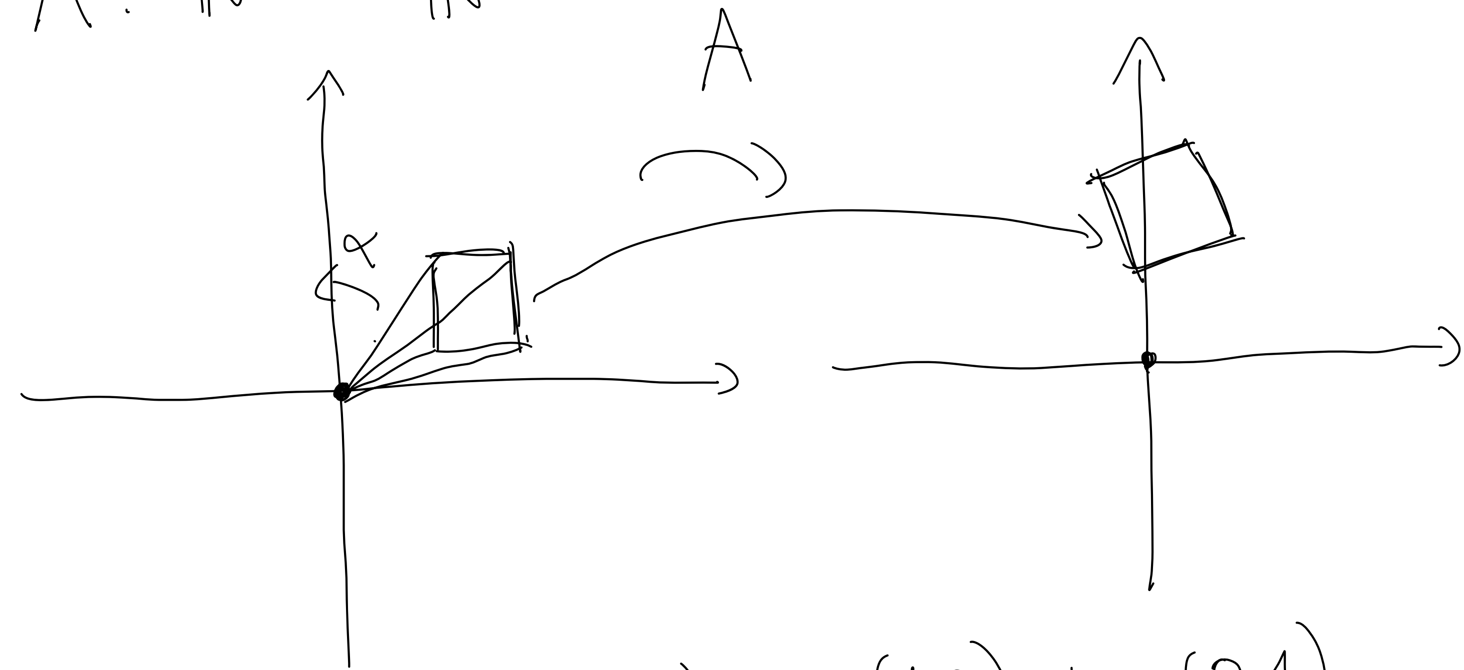
$$A(v) = av + \cancel{b}$$

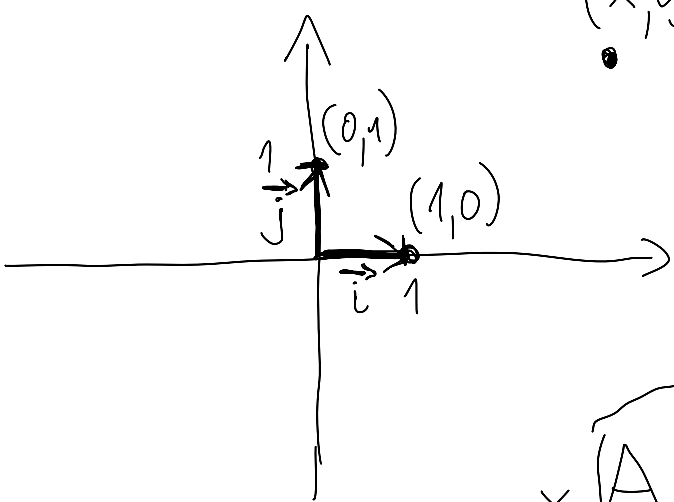
$$f(x) = ax$$

$$f(x) = ax + b$$

NIE jest przekształceniem liniowym, o ile $b \neq 0$.

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



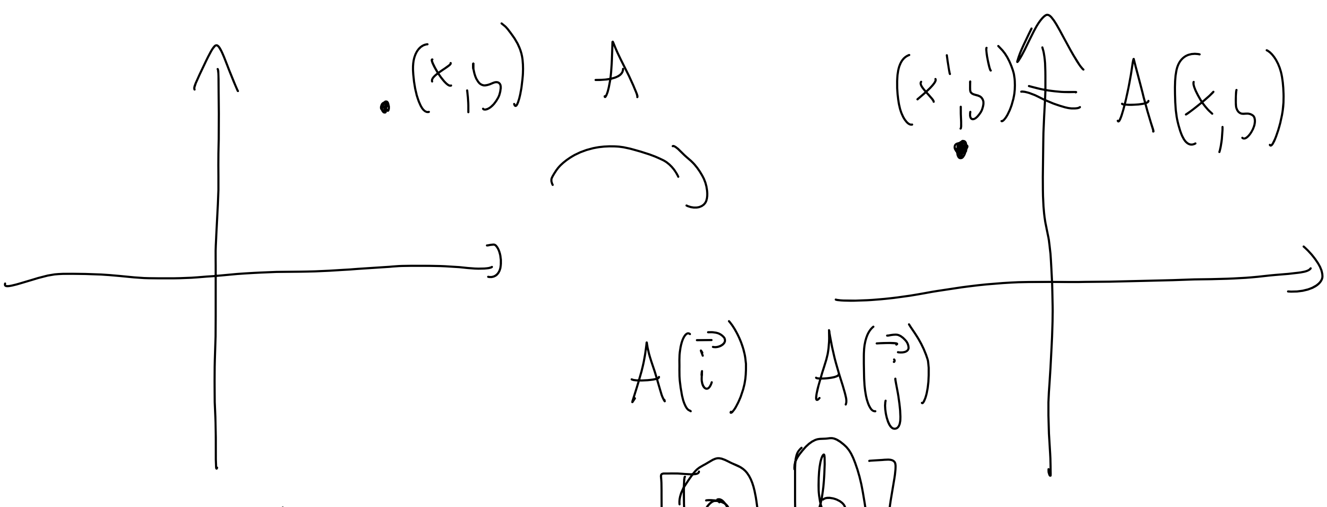


$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$A(x,y) = A\big(x(1,0) + y(0,1)\big)$$

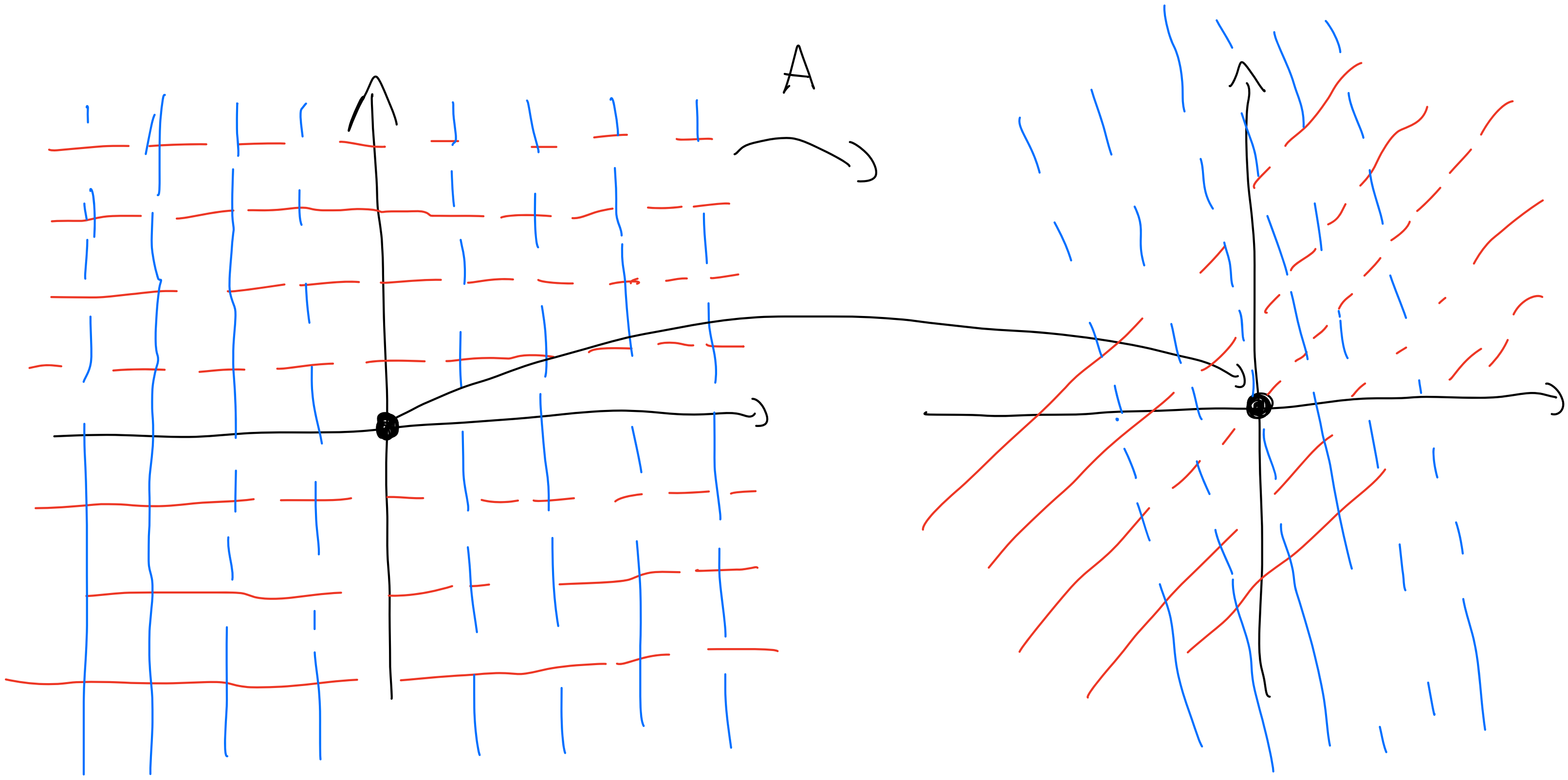
$$= x\,A\underbrace{(1,0)}_{\vec{i}} + y\,A\underbrace{(0,1)}_{\vec{j}} =$$

$$= x\,A(\vec{i}) + y\,A(\vec{j})$$



$$A(\vec{i}) = (a,c)$$
$$A(\vec{j}) = (b,d)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$



1) O → O
2) proste → proste
3) proste równoległe → proste równoległe
4) zachowuje odl. między prostymi