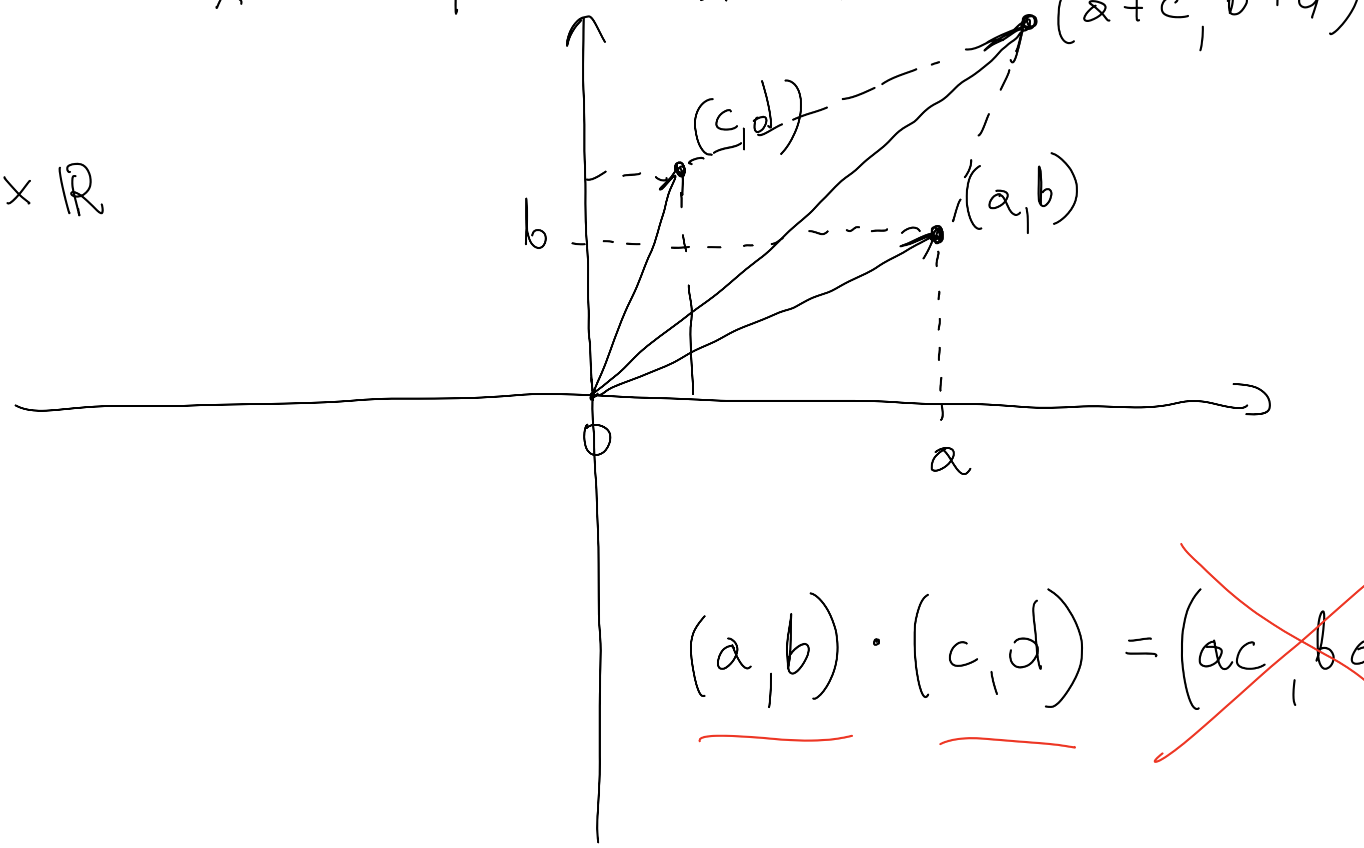
$x^2 = -1$ $\qquad$ $x^2 + 1 = 0$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$$\underline{(a,b)} \cdot \underline{(c,d)} = \cancel{(ac, bd)}$$

Liczby zespolone

Wprowadźmy w zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ następujące działania:

- dodawanie
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
- mnożenie
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Liczby zespolone

Wprowadźmy w zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ następujące działania:

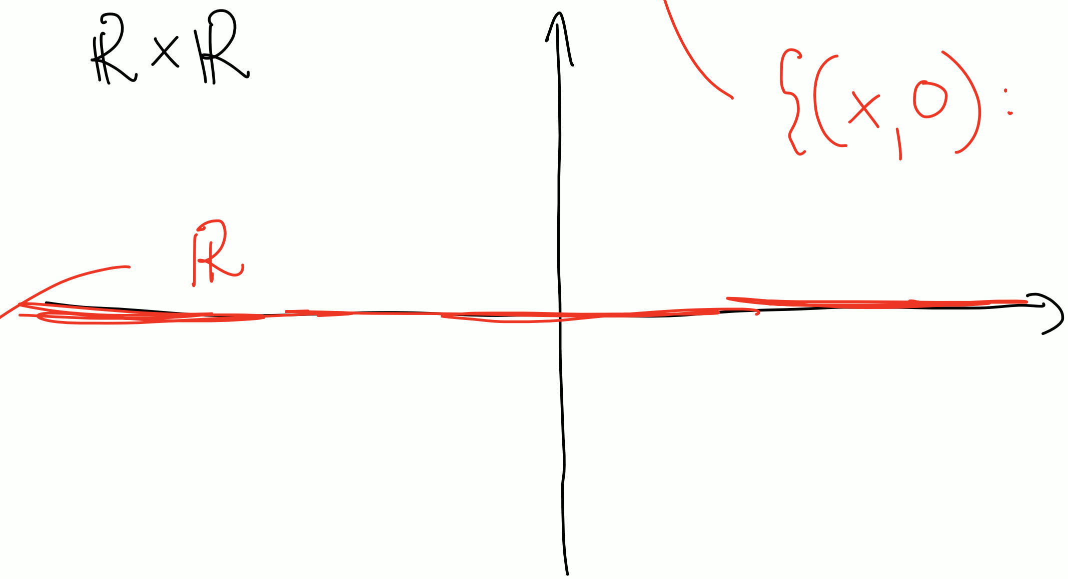
- dodawanie
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
- mnożenie
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Zbiór $\mathbb{R}^2$ z takimi działaniami $+$ i $\cdot$ nazywamy zbiorem **liczb zespolonych** i oznaczamy $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \approx \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



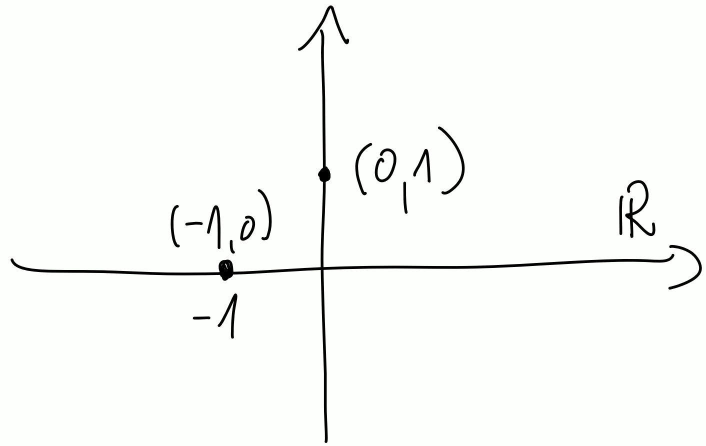
$$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$$

$$(a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot b) =$$

$$= (ab, 0)$$

$\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

i



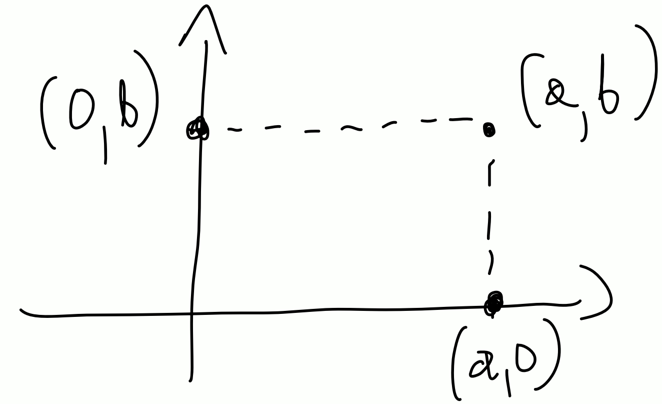
$$(0,1) \overset{\text{ozn.}}{\equiv} i$$

$$\underbrace{(0,1)}_{i} \cdot \underbrace{(0,1)}_{i} = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = \underbrace{(-1,0)}_{-1}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

i - jednostka <u>urojona</u> (imaginary unit)

Działania



$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a\underbrace{(1,0)}_{1} + b\underbrace{(0,1)}_{i} =$$

$$= \boxed{a + bi}$$

$$(a,b) + (c,d) = (\underline{a+c}, \underline{b+d})$$

$$(a+bi) + (c+di) = a + c + bi + di = \underline{a+c} + \underline{(b+d)}i$$

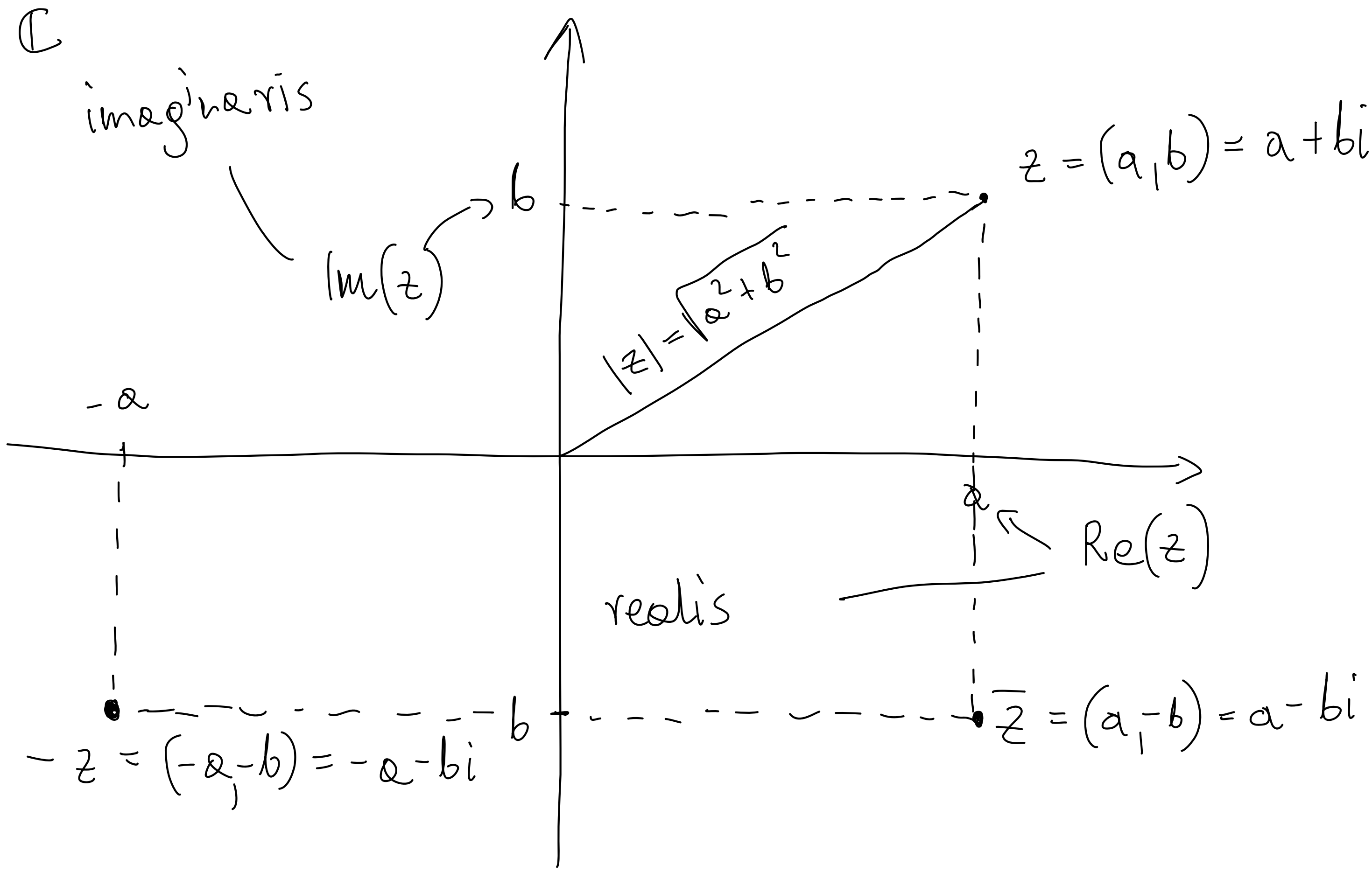
$$(a,b)\cdot(c,d) = (\underline{ac-bd}, \underline{ad+bc})$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bic + bidi = ac + (ad+bc)i + bd\underbrace{i^2}_{-1} = \underline{ac-bd} + (\underline{ad+bc})i$$

Definicje

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$. $a, b \in \mathbb{R}$

- Liczba z jest punktem (a, b) na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$.
- Liczbę $\bar{z} = a - bi$ nazywamy **sprzężeniem** liczby z.
- Liczbę nieujemną $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy **modułem** liczby z.
- Liczbę $\operatorname{Re} z = a$ nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z.
- Liczbę $\operatorname{Im} z = b$ nazywamy **częścią urojoną** liczby z.



$$\mathrm{Im}(a + bi) = b$$

Własności

- $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.
- Równość $z = w$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$z, w \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w, \qquad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

$-b^2$

$\parallel$

- $z\bar{z} = |z|^2$. $\quad (a+bi)(a-bi) = a^2 + \cancel{bia} - \cancel{abi} - (bi)^2 =$

$= a^2 + b^2 = |z|^2$

- Jeżeli $z \neq 0$, to

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

$\mathbb{C}$

$\mathbb{R}$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = -1+\sqrt{2}$$

Przykłady

- Obliczyć
$$(2+i)(3-4i).$$
- Obliczyć
$$\frac{3+2i}{2-i}.$$

$$(2+i)(3-4i) = 6 - 8i + 3i - 4i^2 = 6 + 4 - 5i =$$
$$= 10 - 5i$$

$$i^2 = -1$$

$$\frac{3+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6+3i+4i+2i^2}{2^2+1^2} = \frac{4+7i}{5}$$

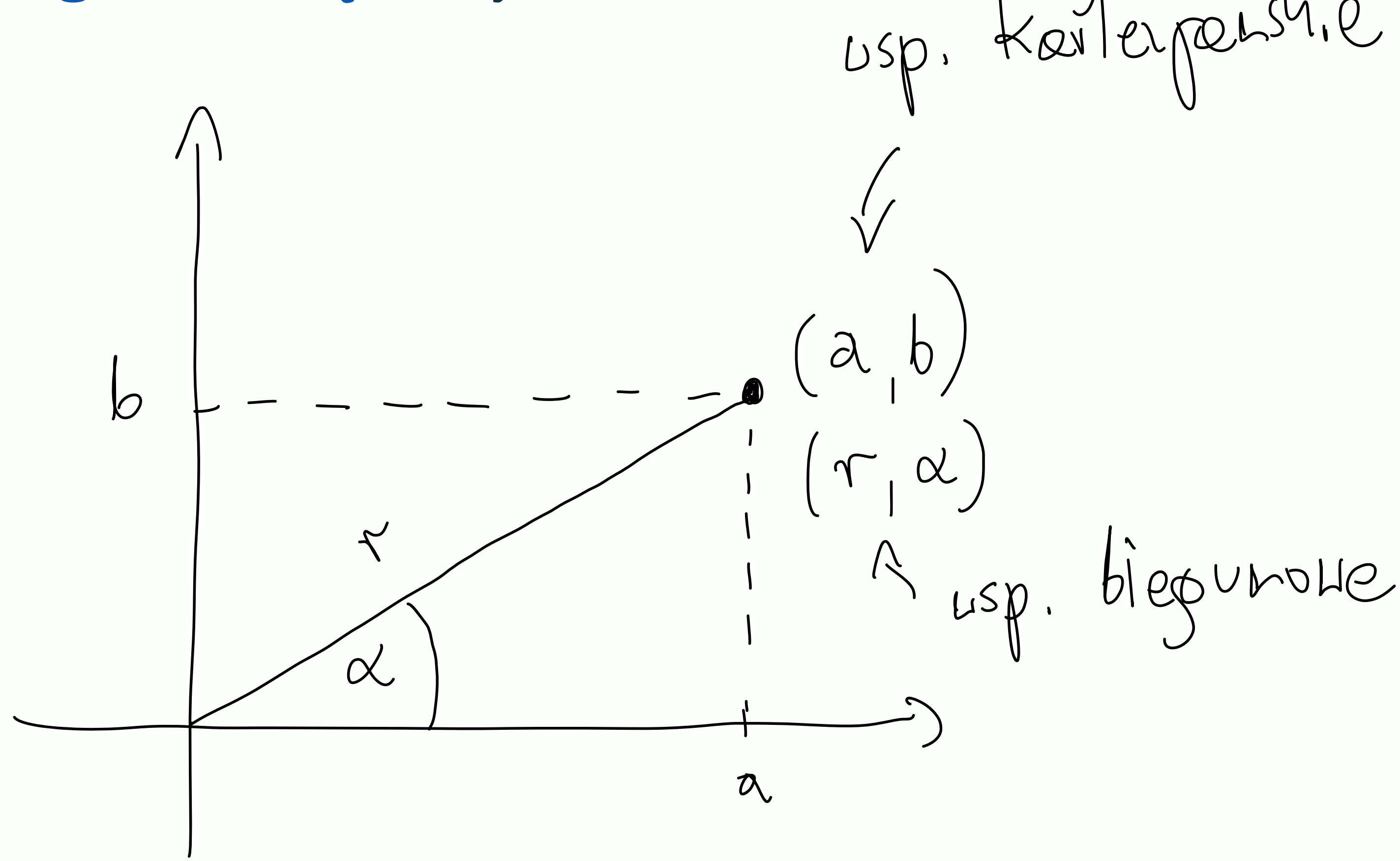
$$i^2 = -1$$

Postać algebraiczna

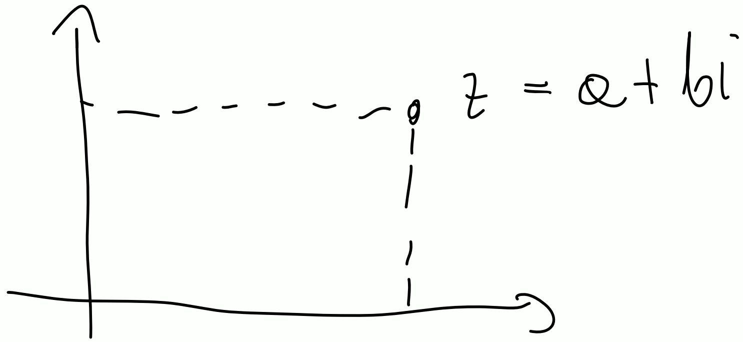
Zapis

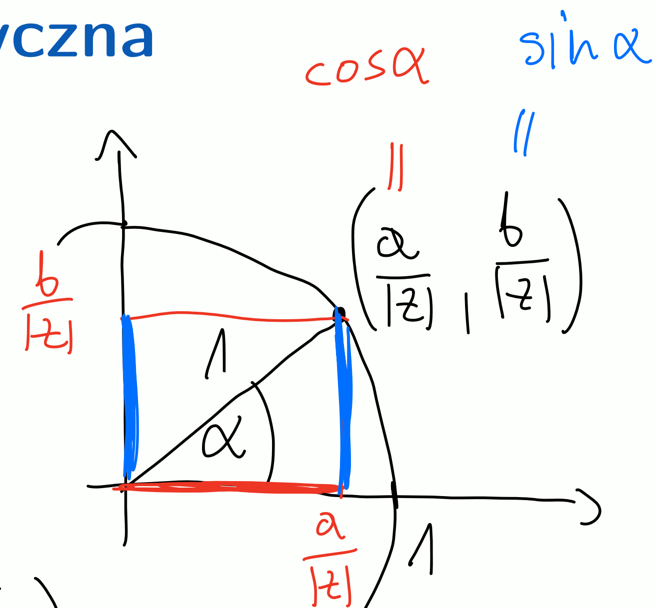
$$z = a + bi$$

nazywamy **postacią algebraiczną** liczby z.



Postać trygonometryczna





$$a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right) =$$

$$\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{|z|^2} = 1$$

$$= |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Podstać trygonometryczna

Zapis

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

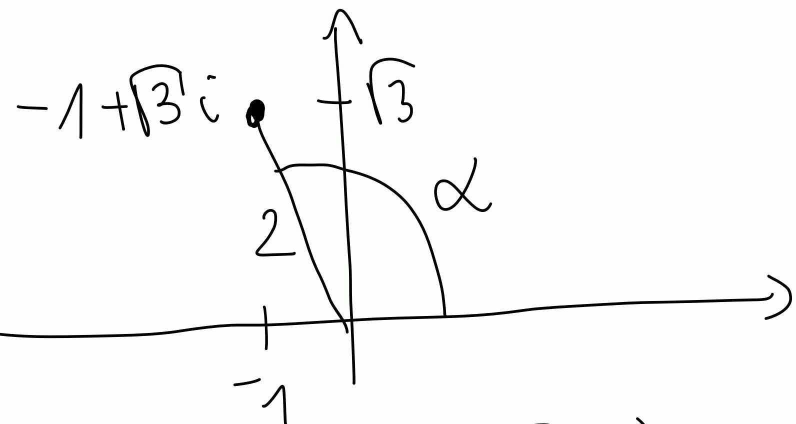
nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby z.

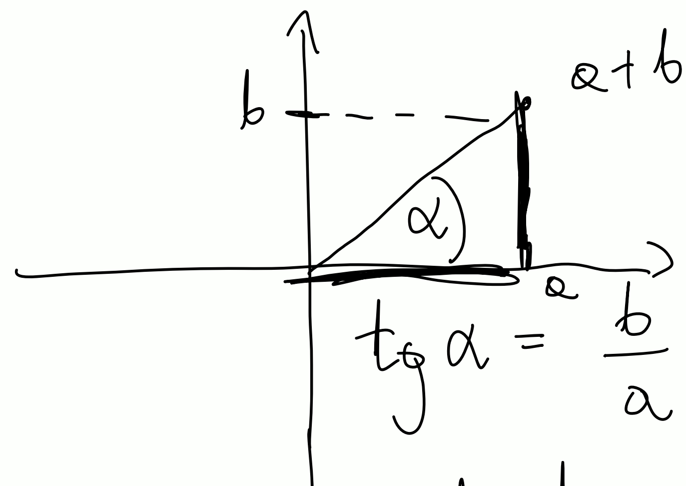
Liczbę α nazywamy **argumentem** liczby $z \neq 0$. Jeżeli $\alpha \in [0, 2\pi)$, to liczbę tę nazywamy **argumentem głównym**.

Przykład

Zapisać liczbę $z = -1 + \sqrt{3}i$ w postaci trygonometrycznej.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$





$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

$$-1+\sqrt{3}\,i = 2\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\alpha} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\alpha}\,i\Big)$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$-1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

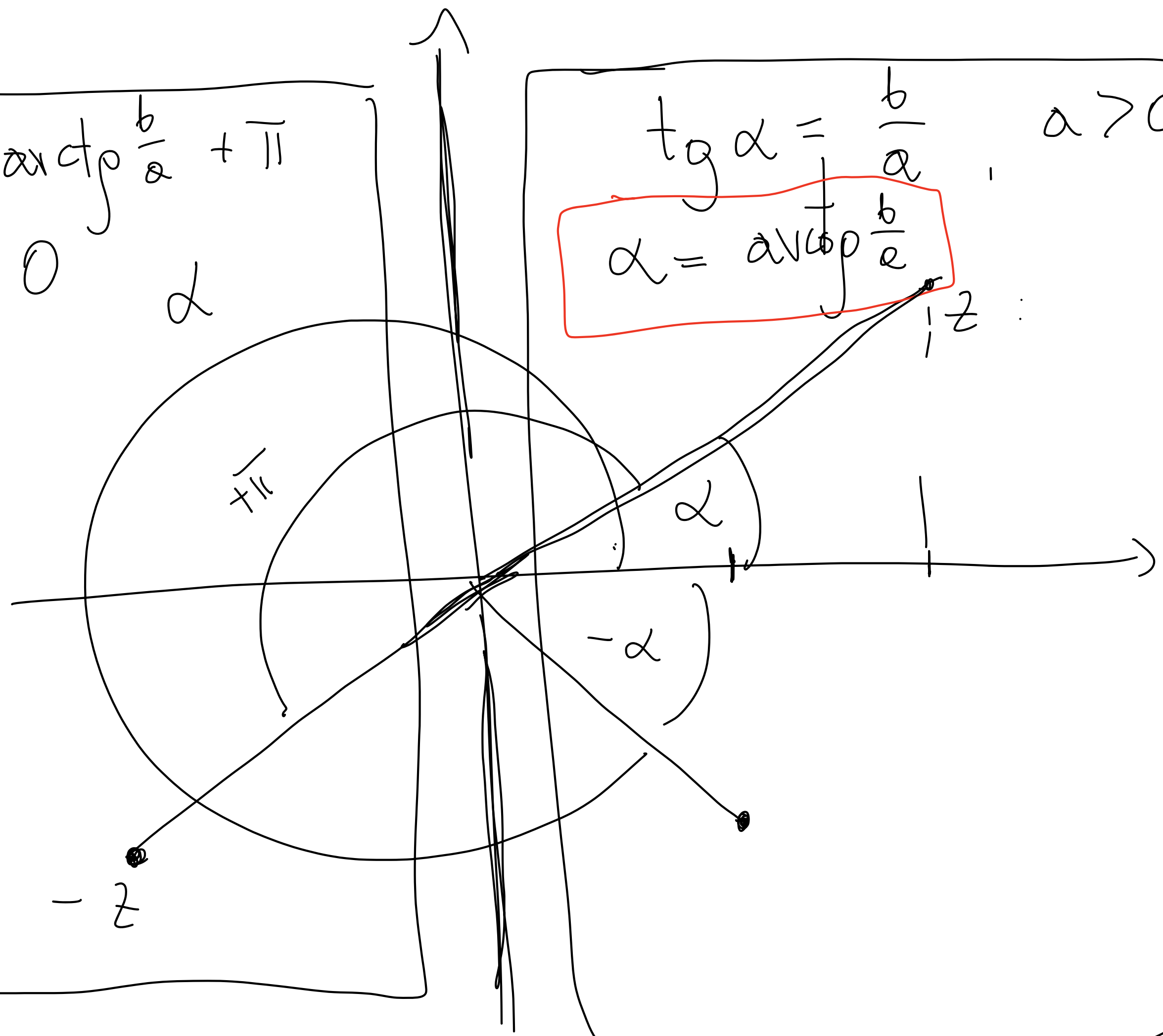
$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi$

$a < 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$

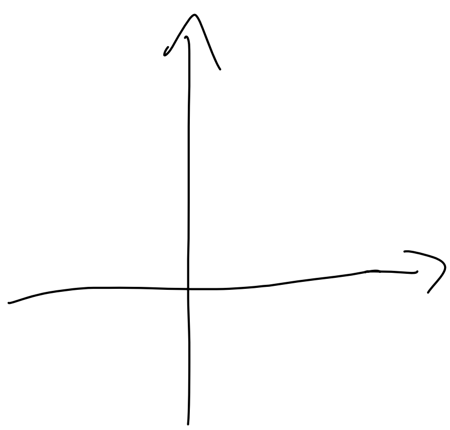
$a > 0$

$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}}$



$(\mathbb{R}, \leq)$

$\mathbb{C}$



$|z| < |w|$

Twierdzenie

Niech

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

oraz

$$w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Wtedy

$$zw = \boxed{|z||w|}(\cos\boxed{(\alpha+\beta)} + i\sin(\alpha+\beta)).$$

ćw.

W szczególności

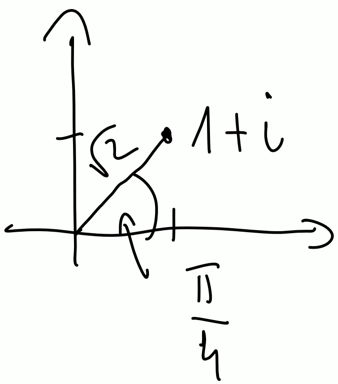
wzór de Moivre'a-Laplace'a

$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)).$$

$a + bi$	$\lvert z\rvert(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
+ łatwe	+ trudne
· trudne	· łatwe

Przykład

Wyznaczyć
$$(1+i)^{100}.$$



$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^{100} = \left(\sqrt{2}\right)^{100}\cdot\left(\cos\overset{25\pi}{\overset{\parallel}{\frac{100\pi}{4}}} + \sin\overset{25\pi}{\overset{\parallel}{\frac{100\pi}{4}}}\right) =$$

$$= 2^{50}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) =$$

$$= 2^{50}\left(-1 + i\cdot 0\right) =$$

$$= -2^{50}$$

Postać wykładnicza

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$ wzór Eulera

$\alpha = \pi$ $\quad e^{i\pi} = -1$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$$a + bi = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|e^{i\alpha}$$

alg. $\quad$ tryg. $\quad$ postać wykładnicza

$$e^{x+y} = e^{x} \cdot e^{y}$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

Przykład

Wyznaczyć wzory na $\cos(3\alpha)$, $\sin(3\alpha)$ oraz $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos^2\alpha$, $\sin^3\alpha$, ...

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha)$$

$$\| $$

$$\cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\cdot(i\sin\alpha)^1 + 3\cos^1\alpha\cdot(i\sin\alpha)^2 + (i\sin\alpha)^3 =$$

$$(i\sin\alpha)^2 = -\sin^2\alpha, \qquad (i\sin\alpha)^3 = i^3\sin^3\alpha = i^2 i\sin^3\alpha = -i\sin^3\alpha$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha + i\left(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\right)$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$$

$$\sin(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$$

$$\sqrt[n]{z}$$