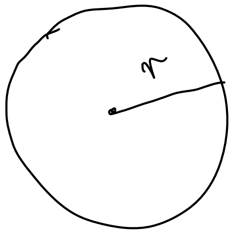
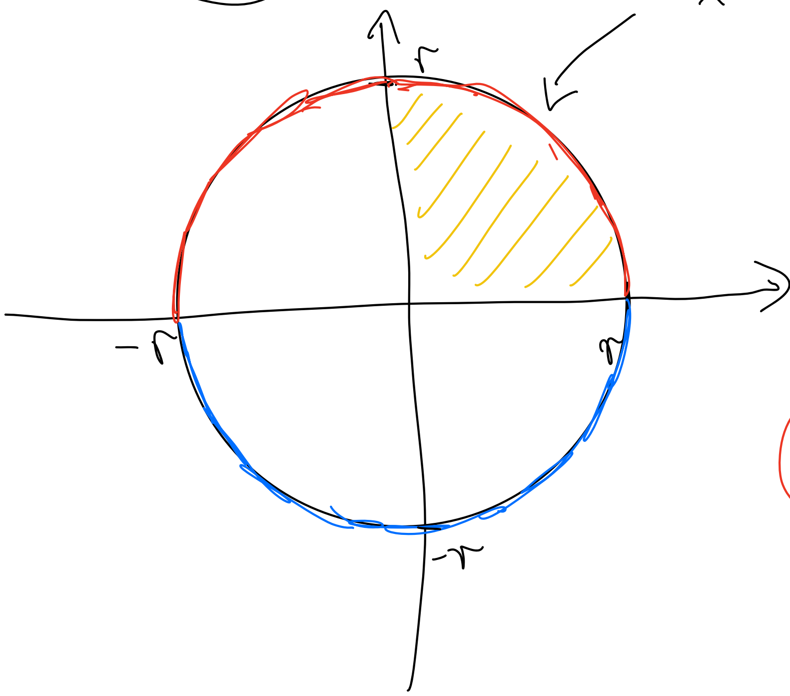
1.




Pole = ?




$x^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad r > 0$

$y^2 = r^2 - x^2$

$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$

$y_1 = \sqrt{r^2 - x^2}$

$y_2 = -\sqrt{r^2 - x^2}$

$\sin t = \frac{x}{r}$

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \quad x \in \langle 0, r \rangle$

$$P = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = r\sin t \\ dx = r\cos t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & r \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} r\sqrt{1 - \sin^2 t}\; r\cos t\,dt =$$

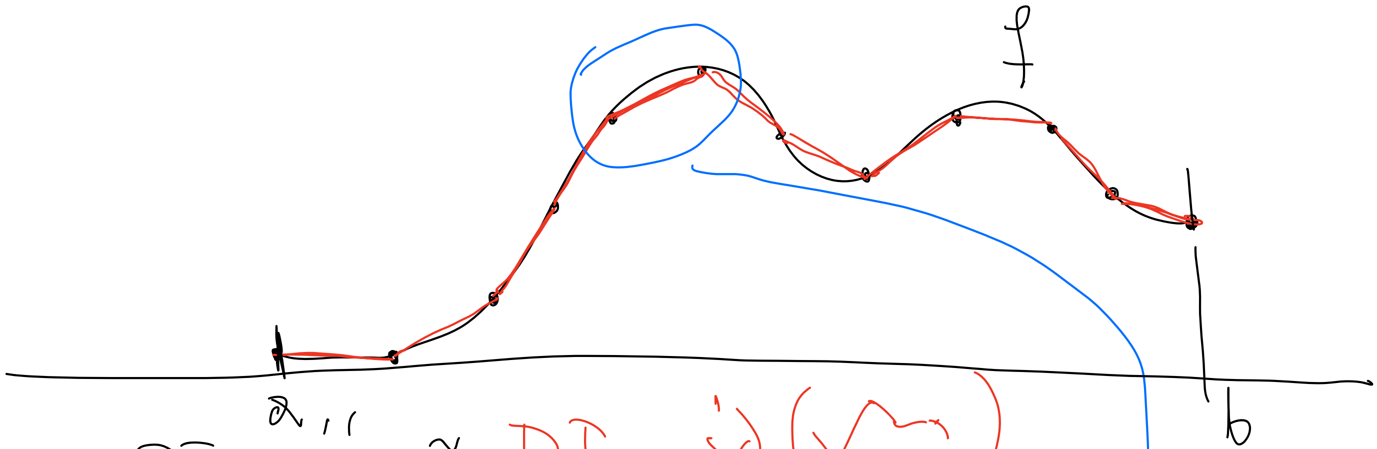
$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \cos t \geq 0 \\ \text{dla } t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{array} \right\}$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t\,dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{r^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{r^2}{2} \left[ t + \frac{1}{2}\sin 2t \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + 0 - (0 + 0) \right] = \frac{\pi r^2}{4}$$

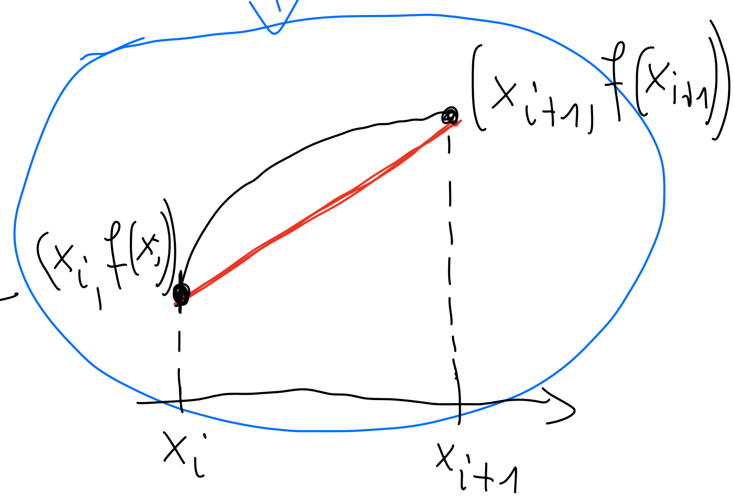
# Długość krzywej




Długość ≈ Długość ( )

$\sum$ Długość odcinka

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)^2}$$




$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{\Delta x_i}\sqrt{1+\left(\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right)^2} \approx \int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

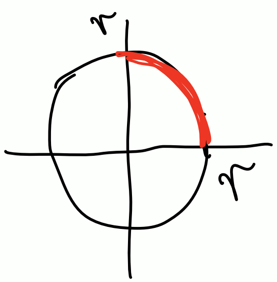
$$\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f'(c_i), \quad c_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$$

# Zastosowania

Załóżmy, że funkcja $f$ ma ciągłą pochodną na przedziale $\langle a, b\rangle$.
**Długość krzywej** $y = f(x)$ dla $x \in \langle a, b\rangle$ jest równa

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

DEFINICJA



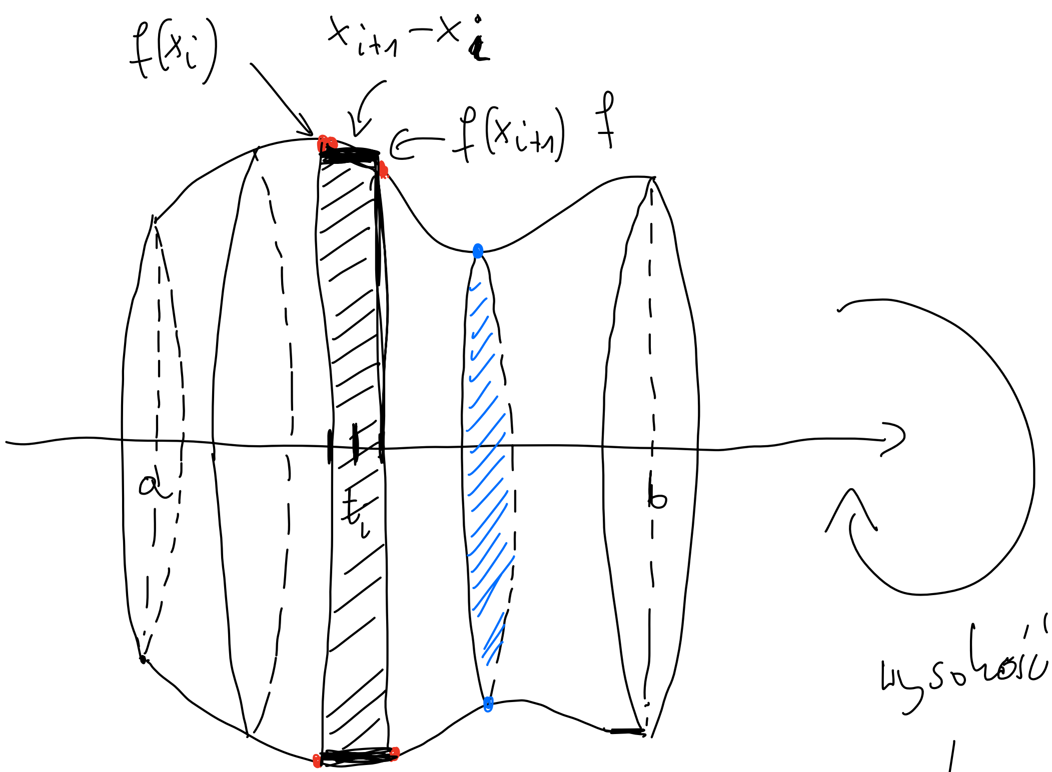

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = f(x), \quad x \in \langle 0, r\rangle$$

$$\int_0^r \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)'\right)^2}\, dx = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = rt \\ dx = r\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & r \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| = r\int_0^1 \frac{r\,dt}{\sqrt{r^2 - r^2 t^2}} = r\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$$

$$= r \arcsin t \Big|_0^1 = r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = r \cdot \frac{\pi}{2}$$




wysokość walca

Objętość $\approx \sum V(\ ) = \sum \Delta x_i \, \pi \big(f(t_i)\big)^2$

$$\approx \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Pole pow. bocznej $\approx \sum P(\ ) =$

$$= \sum \underbrace{\Delta x_i}_{\text{wysokość}} \cdot 2\pi \underbrace{f(t_i)}_{\text{promień podstawy}}$$

$$\approx 2\pi \int_a^b f(x) \underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\,dx$$

# Zastosowania

**Pole powierzchni** bryły powstałej przez obrót krzywej

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle$$

wokół osi $Ox$ jest równe

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

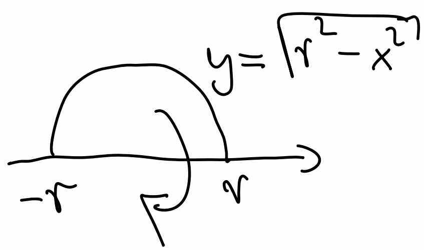
# Zastosowania

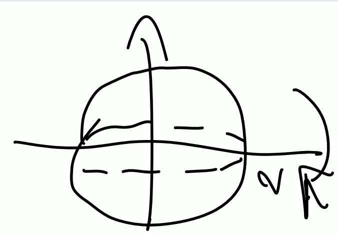
**Objętość** bryły powstałej przez obrót obszaru „pod krzywą”

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b\rangle$$

wokół osi $Ox$ jest równa

$$|V_x| = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

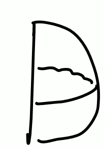



$$\frac{1}{2} V_{kuli} = \pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^r (r^2-x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]\Big|_0^r = \pi r^2 r - \pi \frac{r^3}{3} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}$$



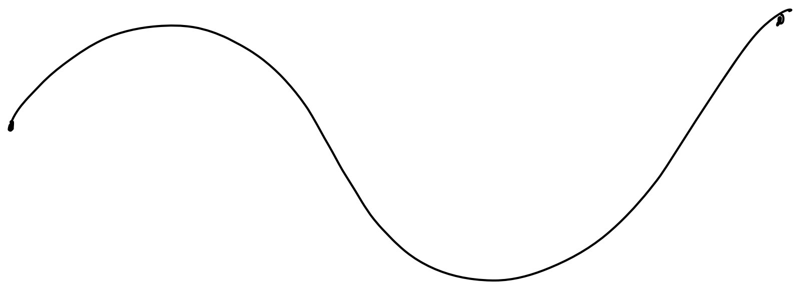
# Zastosowania

**Objętość** bryły powstałej przez obrót obszaru „pod krzywą”

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle$$

wokół osi $Oy$ jest równa

$$|V_y| = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

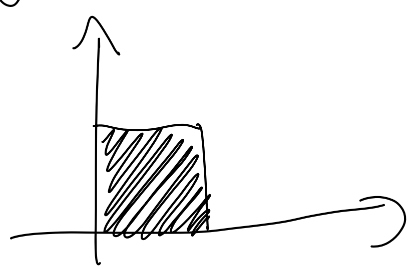


$$\boxed{\int \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

$y = f(x)$ , $x \in \langle a, b \rangle$

Krzywe Peana (Peano)

$y = f(x)$ , $x \in \langle a, b \rangle$



# Przykłady

- Wyprowadzić wzór na pole koła.
- Wyprowadzić wzór na objętość stożka i kuli.

# LICZBY ZESPOLONE

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

Czy równanie

$$x + 1 = 0$$

ma rozwiązanie?

$x = -1$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sim)$

$3 \ominus 2$

$-2$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

To zależy, gdzie szukamy rozwiązań!

| $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ |
| --- | --- |
| NIE | TAK |

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

| $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ |
|---|---|
| NIE | TAK |

Czy równanie

$$x^2 = 2$$

ma rozwiązanie?

$x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2}$

$\mathbb{Q}$

NIE

$\mathbb{R}$ ?

TAK

Czy równanie

$$x^2 = -1$$

ma rozwiązanie?

NIE!

$\mathbb{R}$

NIE

?

TAK

LICZBY ZESPOLONE