$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \qquad \Delta = b^2-4ac < 0$$

$$\downarrow$$

$$\int \qquad dx = I_1 + I_2$$

$$\uparrow$$

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x))^n}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{t^n}\,dt = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{t^{n-1}} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(f(x))^{n-1}}$$

$$I_2 = \int \frac{A}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \overset{\text{podstawienie}}{\rightsquigarrow} \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \int \frac{(x)'}{(x^2+1)^n}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int x \cdot \frac{-n}{(x^2+1)^{n+1}}\cdot 2x\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx}_{J_n} - 2n \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx}_{J_{n+1}}$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n, \quad \underline{n \geq 1}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} y_n$$

$n=1$

$$y_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)^1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+1)^1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = y_{2+1} = \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} y_2$$

Uniwersalne podstawienie trygonometryczne

⇝ Jeżeli $\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},}$ to

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{\cancel{1+t^2}}{3+t^2} \frac{2}{\cancel{1+t^2}}dt = 2\int \frac{1}{t^2+3}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{3}s \\ dt = \sqrt{3}ds \end{array} \right| = 2\int \frac{1}{3s^2+3}\sqrt{3}ds = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} s + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Całki z funkcji niewymiernych

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx} =$$

$$t = \sqrt{x^2+1} - x, \quad t > 0$$

$$\sqrt{x^2+1} = t + x \quad |\,(\;)^2$$

$$\cancel{x^2} + 1 = t^2 + 2tx + \cancel{x^2}$$

$$2tx = 1 - t^2$$

$$x = \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow dx = \frac{-2t\cdot 2t - (1-t^2)\cdot 2}{(2t)^2}\,dt$$

$$-4t^2 - 2 + 2t^2$$

$$= \frac{-2(t^2+1)}{4t^2}\,dt = -\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+1} = t + x = t + \frac{1-t^2}{2t} = \frac{2t^2+1-t^2}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

$$\sqrt{x^2+1}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{\cancel{t^2+1}}{\cancel{2t}}} \cdot \frac{-(\cancel{t^2+1})}{\cancel{2}t^{\cancel{2}}}\,dt$$

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln\left|\sqrt{x^2+x} - x\right| + C =$$

$$= -\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}\right) + C =$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + C$$

$\int$ funkcja, w której występuje x w dowolnej potędze oraz $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dx

$$\int \frac{x^2}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = \dots ?$$

$$\int W\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

Podstawienia Eulera

I $a > 0$ $\qquad t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\,x$

II $c \geqslant 0$ $\qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$

III $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$\qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

Wzór Newtona-Leibniza

Twierdzenie

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $\langle a, b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

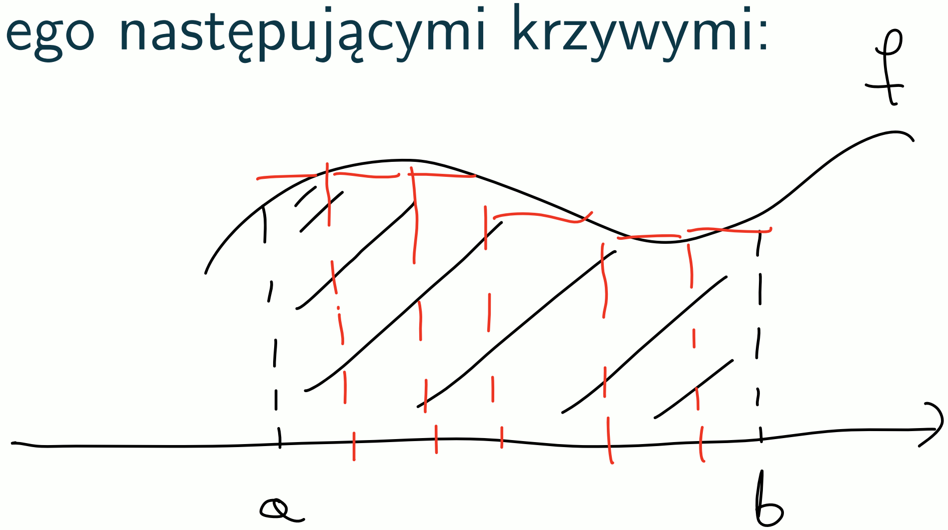
Interpretacja geometryczna

Jeżeli funkcja f jest nieujemna na przedziale $\langle a, b\rangle$, to całka oznaczona

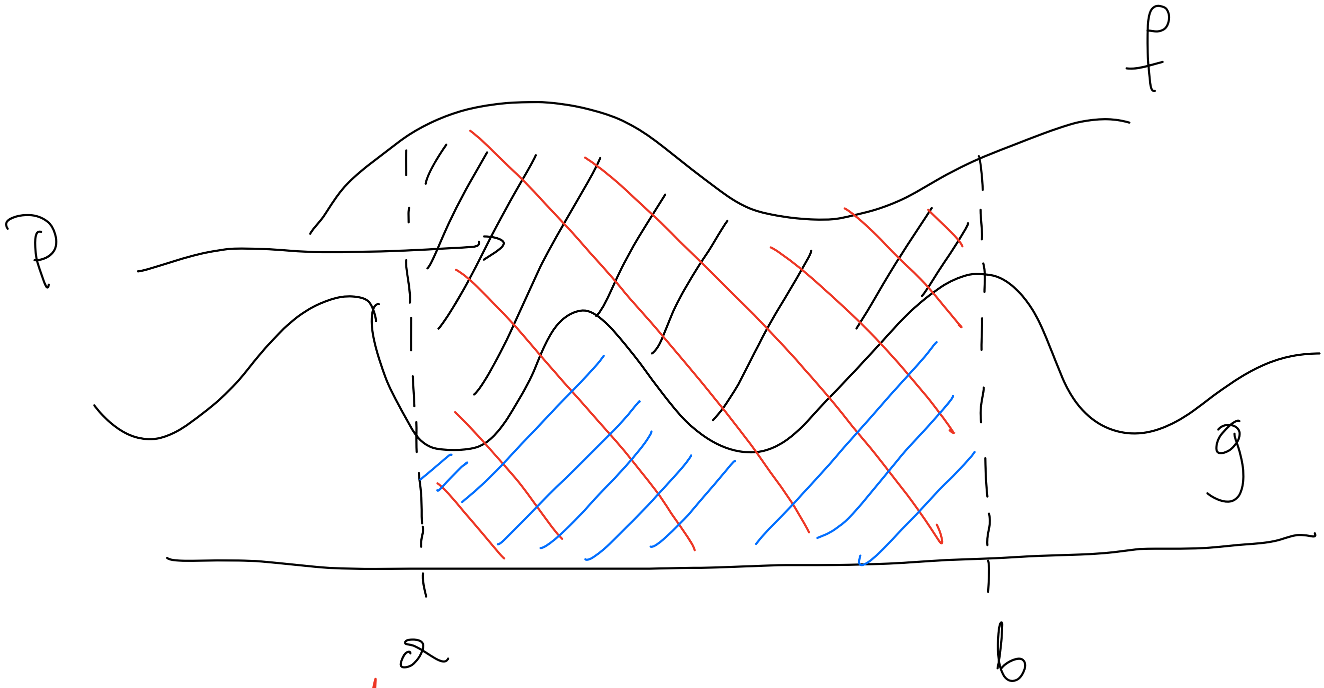
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

jest **polem** obszaru ograniczonego następującymi krzywymi:

- osią Ox,
- wykresem funkcji f,
- prostą $x = a$,
- prostą $x = b$.



DEFINICJA POLA



$$P_f = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$P_g = \int_a^b g(x)\,dx$$

$$P = P_f - P_g = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Uwaga

Jeżeli $f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in \langle a, b \rangle$, to pole obszaru zawartego między wykresami funkcji f i g na przedziale $\langle a, b \rangle$ jest równe

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

$$O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ , \ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Własności całki oznaczonej

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0,$
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ dla dowolnego $c \cancel{\neq 0},$
- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ dla $b \in \langle a, c\rangle.$

Całkowanie przez części

Jeżeli funkcje f, g są różniczkowalne na przedziale $\langle a, b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$$

$$= 1e^1 - 0\cdot e^0 - e^x\Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) =$$

$$= e - e + 1 = \underline{1}$$

Całkowanie przez podstawienie

Załóżmy, że funkcja f jest określona na przedziale $\langle a, b\rangle$, a funkcja $\phi\colon \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ ma ciągłą pochodną oraz spełnia warunki

- $\phi(\alpha) = a$,
- $\phi(\beta) = b$.

Wtedy
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,dx.$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{1+t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \left| \begin{array}{l} s = 1+t \\ ds = dt \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 1 \\ \hline s & 1 & 2 \end{array} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{2}\ln|s|\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \underline{\ln\sqrt{2}}$$