$f \in R(a,b)$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

- F jest ciągła
- Tw. N-L. f jest ciągła w x_0 $\Rightarrow$ F jest różniczkowalna w x_0 i $\underline{F'(x_0) = f(x_0)}$.

Dowód. $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^x + \int_{x_0}^a = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt \qquad \neq 0$$

Ponieważ f jest ciągła w x_0,

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \quad |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$\Updownarrow$$

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow \boxed{f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon}$$

Stąd, dla x spełniającego $0 < x - x_0 < \delta$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x-x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t)\,dt \leq (f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0) \quad /:(x-x_0)$$

$t \in \langle x_0, x\rangle$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dx \leq f(x_0) + \varepsilon$$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow F'_+(x_0) = f(x_0).$$

Analogicznie dla $F'_-(x_0)$.

Funkcja F jest **funkcją pierwotną** funkcji f na przedziale I, jeżeli

$$F'(x) = f(x)$$

dla każdego $x \in I$.

$f(x) = x$ $\quad F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$f(x) = \sin x$ $\quad F(x) = -\cos x$

$f(x) = e^x$ $\quad F(x) = e^x$

$f(x) = e^{x^2}$ $\quad F(x) = ?$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad F(x) = ?$

Charakteryzacja funkcji pierwotnych

Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $\underline{I}$, to

- $\rightsquigarrow$ $G = F + C$ jest funkcją pierwotną f dla dowolnej stałej C,
- $\rightsquigarrow$ każda funkcja pierwotna funkcji f jest postaci $F + C$.

$$G' = (F + C)' = F' + (C)' = F' = f \qquad \left(\tfrac{1}{2}x^2 + 5\right)' = x$$

Jeżeli $G' = f$, to $(G - F)' = G' - F' =$
$= f - f = 0$

$\Rightarrow$ $G - F$ jest f. stałą

$$f(x) = x \qquad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Funkcje pierwotne jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do stałej.

Całka nieoznaczona

Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F + C \colon C \in \mathbb{R}\},$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Zbiór ten oznaczamy

$$\int f(x)\, dx.$$

$$\int x\, dx = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + C \colon C \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Własności

- $\displaystyle \left[\int f(x)dx\right]' = f(x),$
- $\displaystyle \int f'(x)dx = f(x) + C.$

$$f \xrightarrow[(\ )']{} f' \qquad\qquad f' \xrightarrow[\int(\ )]{} f$$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, bend left, "(\ )'"] & f' \arrow[l, bend left, "\int(\ )"]
\end{tikzcd}$$

Istnienie całki nieoznaczonej

Twierdzenie

Każda funkcja ciągła na przedziale I ma na tym przedziale funkcję pierwotną.

f jest ciągła na $I = \langle a, b \rangle$

$F(x) = \boxed{\int_a^x f(t)\,dt}$ jest funkcją pierwotną f.

Tw. N-L: $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

$\boxed{f(x) = x^a , \quad f'(x) = a x^{a-1}}$ $a \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\int \underline{a x^{a-1}}\, dx = \underline{x^a} + C$

$\boxed{f(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} , \quad f'(x) = x^a}$, $a \neq -1$

$\Updownarrow$

$\boxed{\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C , \quad a \neq -1}$

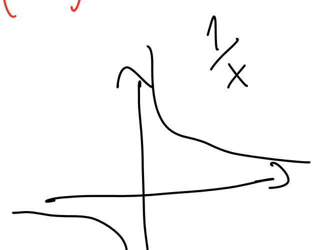
$\int \frac{1}{x} \, dx$? $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \underset{x > 0}{\ln x} + C$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Na predzvole $I = (0, +\infty)$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

$I = (-\infty, 0)$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$



$x < 0$:

$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C , & x > 0 \\ \ln(-x) + C , & x < 0 \end{cases} = \boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C}$

$\begin{cases} \ln x + 3 , & x > 0 \\ \ln(-x) - 8 , & x < 0 \end{cases}$

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

- $\displaystyle\int 0\ dx = C, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int x^a\ dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ lub } x \in (0, \infty)$
- $\displaystyle\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int e^x\ dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$\frac{1}{\ln a}(a^x)' = a^x$$

$$\left(\frac{1}{\ln a}a^x\right)' = a^x$$

$\rightsquigarrow \quad \displaystyle\int \sin x \; dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}$ $\iff$ $\underbrace{(\cos x)' = -\sin x}$

$\rightsquigarrow \quad \displaystyle\int \cos x \; dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \quad \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big), \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow \quad \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arcctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \quad x \in (-1,1)$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C, \quad x \in (-1,1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin(2x+3)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\Rightarrow \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0$$

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = F'(ax+b) =$$

$$= f(ax+b)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'\,dx =$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\boxed{\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x) \iff \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C}$$

Przydatne wzory

- $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ dla $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$,
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{1}{f(x)} + C$, $\quad\leftrightsquigarrow \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$.

+ wzór na pochodną złożenia

Twierdzenie o liniowości całki nieoznaczonej

Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

1. $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
2. $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

$\Updownarrow$

$$\left.\begin{aligned}(f+g)' &= f'+g' \\ (cf)' &= cf'\end{aligned}\right]$$

inny sposób zapisu

3. $\underline{\int f\cdot g} = ???$

$(f\cdot g)' = f'g + f\cdot g' \iff fg = \int f'g + \int f\cdot g'$

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

gwarantuje istnienie całek

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

1. $\int x \sin x \, dx = \int \underset{f}{x} \, \underset{g}{(-\cos x)'} \, dx =$

$= x \cdot (-\cos x) - \int (x)' (-\cos x) \, dx =$

$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$

2. $\int x^2 e^x \, dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x \, dx =$

$= x^2 e^x - 2 \underbrace{\int x e^x \, dx} =$

$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) =$

$= e^x (x^2 - 2x - 2) + C$

$\underbrace{\int x e^x dx} = \int x (e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx =$

$= xe^x - \int e^x dx = \underbrace{xe^x - e^x + C}$

3. $\int \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx =$

$= x \ln x - \int x (\ln x)' dx =$

$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$

$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$

4. $\int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx =$

$= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x \, dx =$

$= e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right] = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$

$\Rightarrow \cancel{2} \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$

Przykład

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))\, g'(x)\, dx$$

$$\int \overbrace{\frac{1}{1+\sin^2 x}}^{f'(g)} \overset{g'}{\cos x}\, dx = \operatorname{arctg}(\sin x)$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Jeżeli

1. funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale (a, b),
2. funkcja $g : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ ma ciągłą pochodną na przedziale (α, β),

to

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f oraz $C \in \mathbb{R}$.

$$\int x e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \quad |()' \\ 1dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \int e^t \frac{1}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

2. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{1+t^2} =$

$x^4 = (x^2)^2$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t + C =$

$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(x^2) + C$

3. $\int \frac{\cos x \sin x}{1+\sin^2 x}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix} \right| =$

$= \int \frac{t}{1+t^2}\,dt = \left| \begin{matrix} s = t^2 \\ ds = 2t\,dt \end{matrix} \right| =$

$\leftarrow f'$

f

$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|}$

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$

$= \int \frac{\frac{1}{2}\,ds}{1+s} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+s}\,ds = \frac{1}{2}\ln|1+s| + C =$

$= \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C = \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C$

Całkowanie funkcji wymiernych

$$w(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad , \quad p, q \text{ - wielomiany}$$

funkcja wymierna

Tw. o rozkładzie na ułamki proste:

$$w(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \text{wielomian}(x) + \sum \text{ułamek prosty}(x)$$

I / II rodzaju

$\Downarrow$

$$\int w(x)\,dx = \int \text{wielomian}(x) + \sum \int \text{ułamek prosty}(x)\,dx$$

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

$$\int \frac{A}{x+a}dx = A\ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$n \geqslant 2$

$$\int \frac{A}{(x+a)^n}dx = -\frac{A}{n+1}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^n}dx = \boxed{\frac{x^{-n+1}}{-n+1}} = -\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{x^{n-1}}$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

$$\int x^a\,dx$$

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \quad , \quad \Delta = b^2-4ac<0$$

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

$$\int \frac{x}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$\Delta = 1-4=-3<0$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_2}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$$

$$\| $$

$$= \left| \begin{array}{l} t=f(x) \\ dt=f'(x)\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$I_1 = \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx = \ln|\underbrace{x^2-x+1}_{>0}|+C =$$

$$= \ln(x^2-x+1)+C$$

$$\int \frac{x}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$\Delta = 1-4 = -3 < 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$= \left| \begin{matrix} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx = \ln|\underbrace{x^2-x+1}_{>0}| + C =$$

$$= \ln(x^2-x+1) + C$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \sqrt{\frac{3}{4}}\,t = x-\frac{1}{2} \\ t = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

$$\int \frac{x}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$