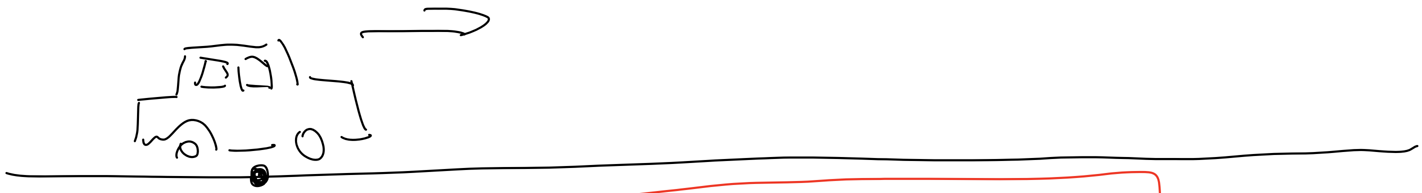
Rachunek całkowy

Intuicja fizyczna



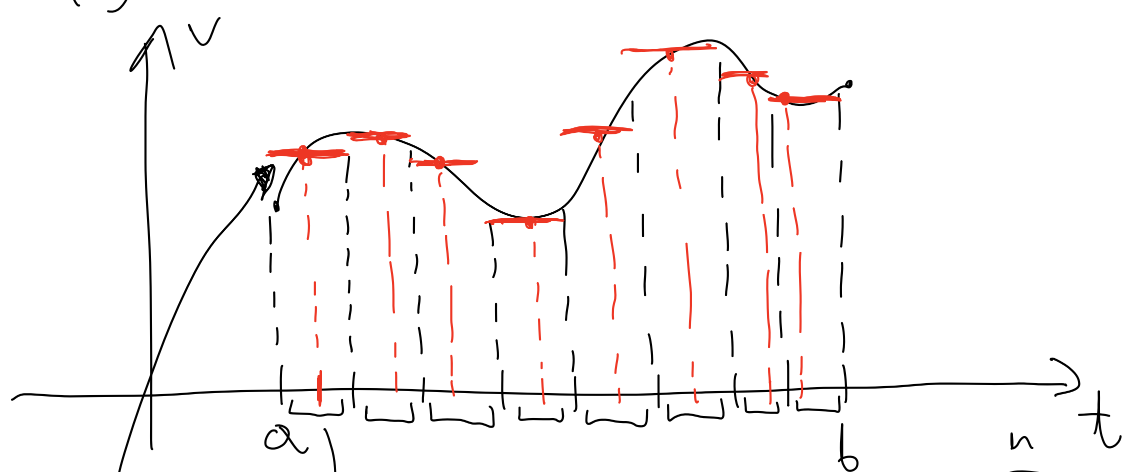
$$\boxed{\text{droga} = \text{prędkość} \cdot \text{czas}}$$

$$s = v \cdot t$$

wykres prędkość w czasie

$v(t) = 2t + 20$

$v(t) = t^2 + 20t$

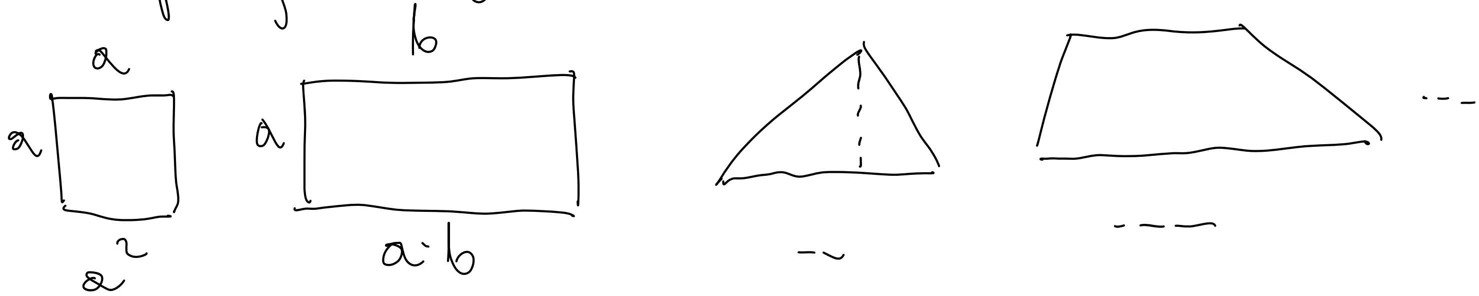


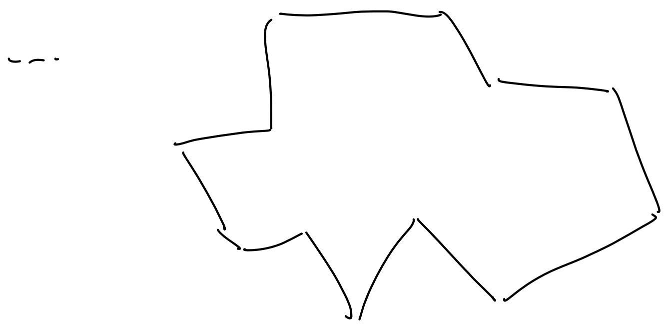
przyrost czasu

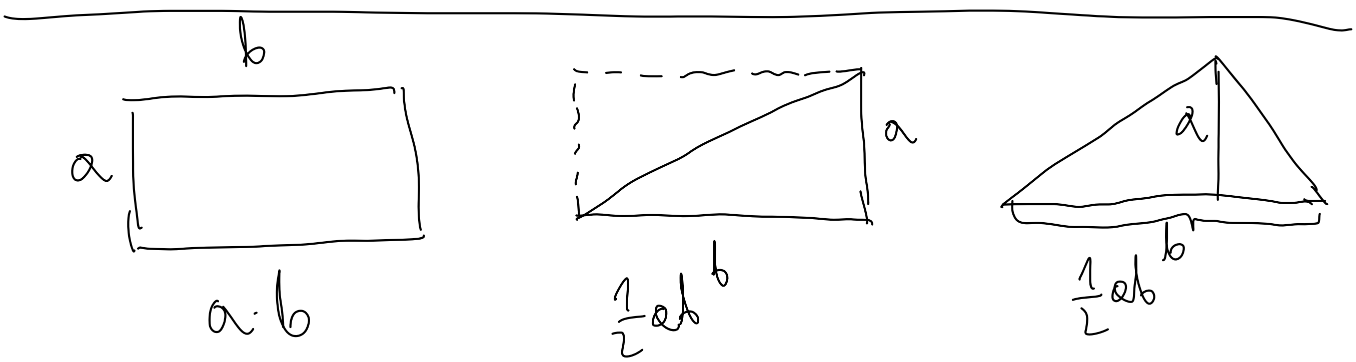
$s = v(t_0) \cdot (\text{różnica czasu})$

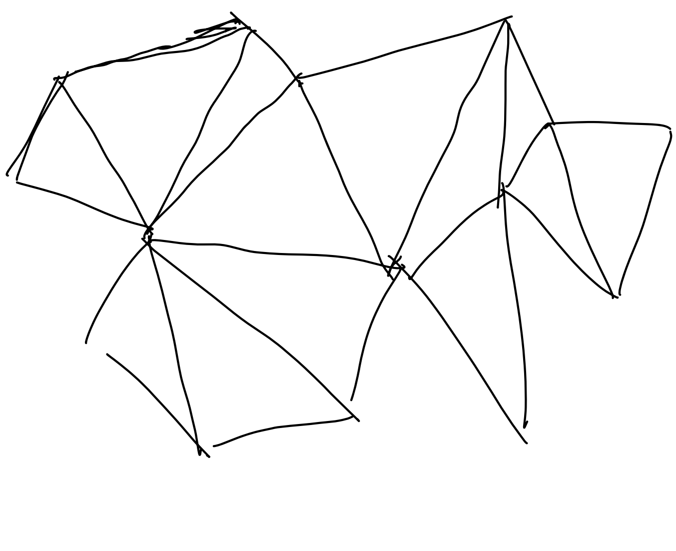
$\text{łączna droga} = \sum_{i=0}^{n} v(t_i) \cdot$

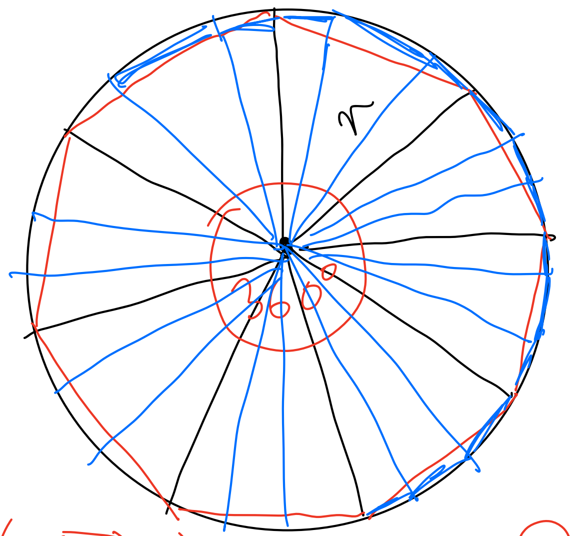
Intuicja geometryczna







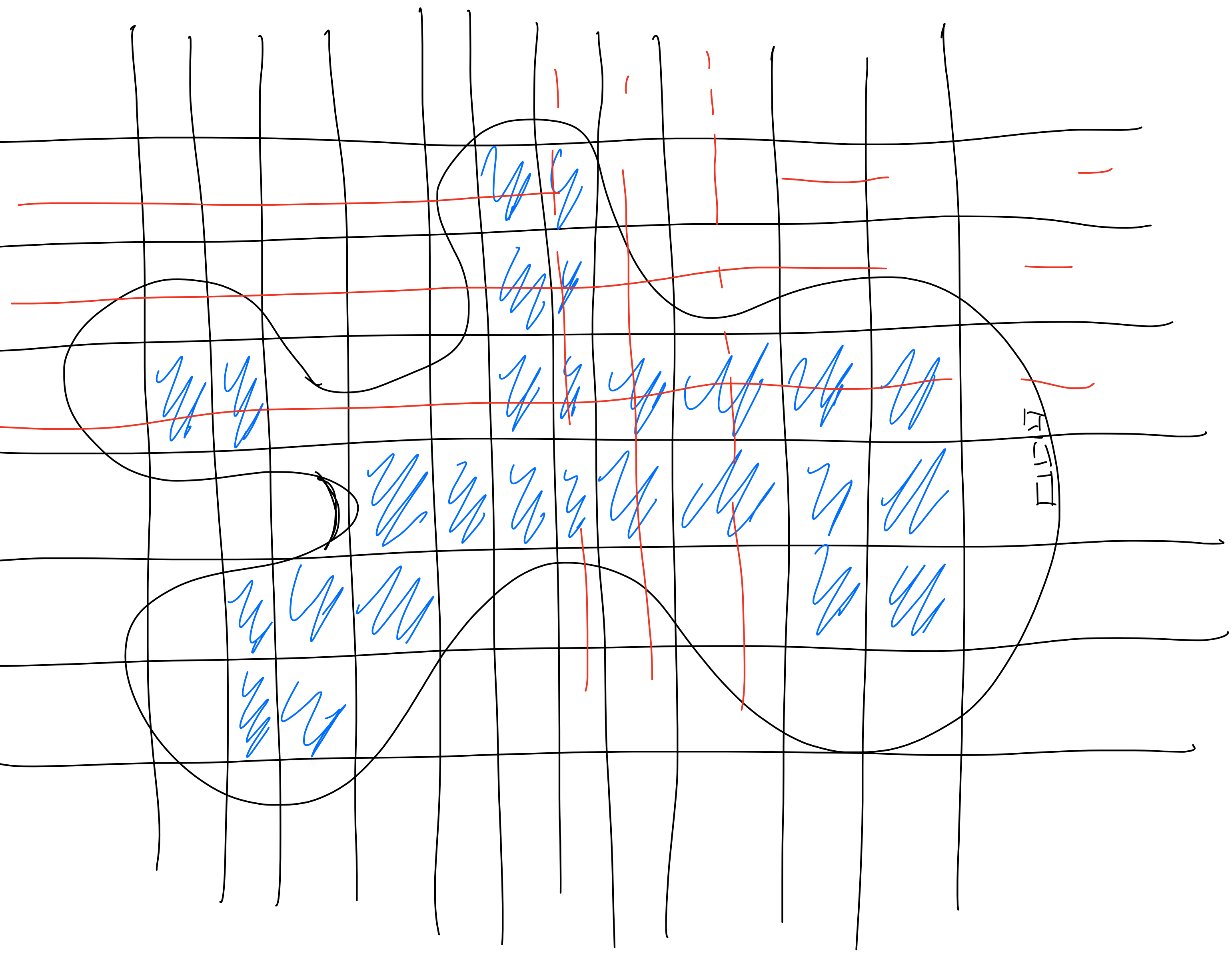




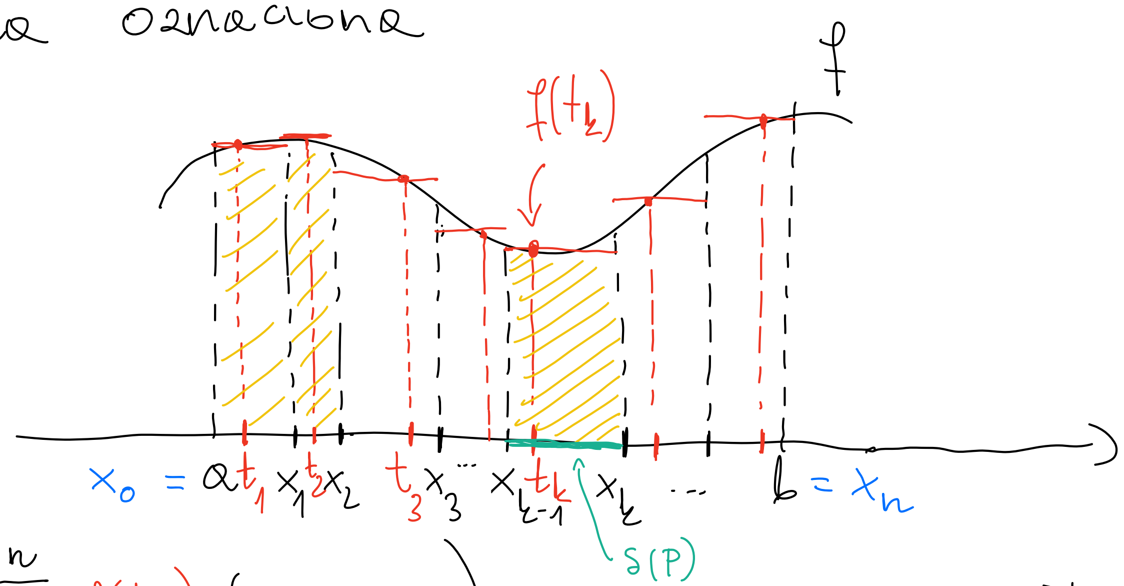
πr^2

$\text{Pole}(\text{⬡}) = \sum \text{Pole}(\triangle)$

r r α



Całka oznaczona



$$S = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x_k} = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$ – suma całkowa

---

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

podział odcinka $\langle a, b\rangle$

$\delta(P) = \max\limits_{k=1,\dots,n} \Delta x_k$ średnica podziału

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $x_{k-1} \leqslant t_k \leqslant x_k$, $k = 1, \dots, n$

zbiór punktów pośrednich

$$S = S(f, P, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – ciąg podziałów

Jeżeli $\delta(P_n) \to 0$ przy $n \to +\infty$, to ciąg (P_n) nazywamy <u>normalnym</u>.

Def. (Całka oznaczona) Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Załóżmy, że funkcja $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ jest ograniczona. Jeżeli ciąg sum całkowych

$$\left(S(f, P_n, T_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

jest zbieżny dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i dowolnego ciągu zbiorów punktów pośrednich $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to funkcję f nazywamy **całkowalną** na przedziale $\langle a, b\rangle$, a granicę

$$(*) \quad \lim_{n\to+\infty} S(f, P_n, T_n)$$

nazywamy **całką oznaczoną** i zapisujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S(f, P_n, T_n).$$

Uwaga. Granica $(*)$ nie zależy od (P_n) i (T_n).

Niech $(P_n), (P_n')$ będą ciągami normalnymi.
$(T_n), (T_n')$

$$(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P_1, P_1', P_2, P_2', P_3, P_3', \ldots)$$

nowy ciąg normalny

$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (T_1, T_1', T_2, T_2', T_3, T_3', \ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n', T_n')$$
$$\|$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, Q_n, U_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n, T_n)$$

Przykład 1. $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x)=c$, $x\in\langle a,b\rangle$.

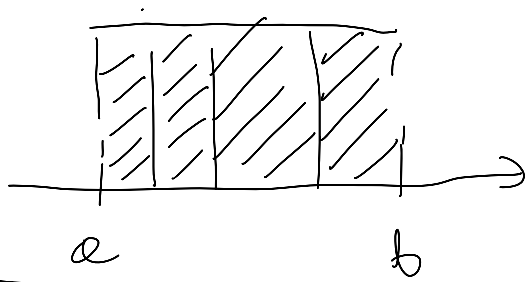
$$\underline{S(f,P,T)} = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k =$$

$$= c\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= c\left[\cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} + \ldots + x_n - \cancel{x_{n-1}}\right] =$$

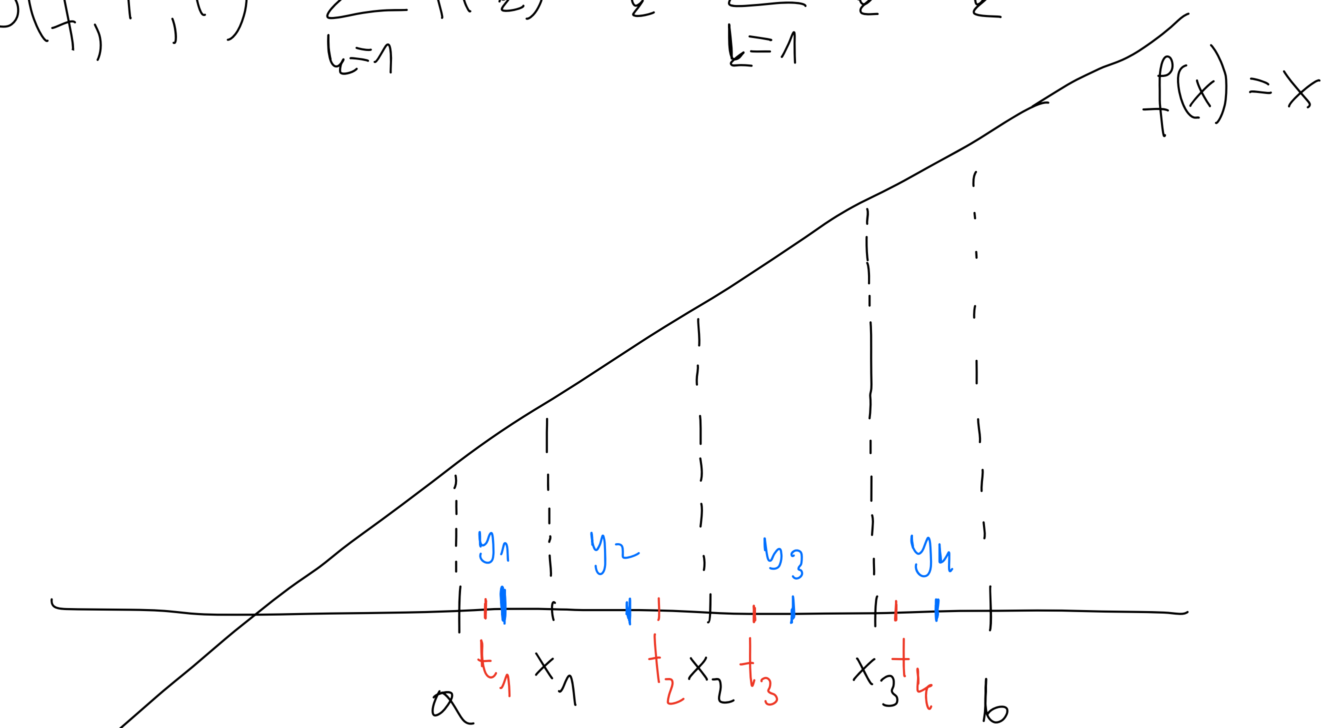
$$= c(x_n - x_0) = \underline{c(b-a)}$$

$$\Rightarrow \int_a^b c\,dx = c(b-a).$$



Przykład 2. $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x)=x$, $x\in\langle a,b\rangle$

$$S(f,P,T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} t_k\,\Delta x_k$$



$$y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$ ← środek odcinka $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$

$$S(f,P,T)=\sum_{k=1}^{n} t_k\,\Delta x_k+\underbrace{\sum_{k=1}^{n} y_k\,\Delta x_k}-\sum_{k=1}^{n} y_k\,\Delta x_k=$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n} y_k\,\Delta x_k}_{S_1}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(t_k-y_k)\,\Delta x_k}_{S_2}$$

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+x_{k-1}}{2}\cdot(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2-x_{k-1}^2\right)=$$

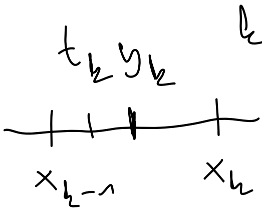
$$=\frac{1}{2}\left[\cancel{x_1^2}-x_0^2+\cancel{x_2^2}-\cancel{x_1^2}+\cancel{x_3^2}-\cancel{x_2^2}+\ldots+x_n^2-\cancel{x_{n-1}^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_n^2-x_0^2\right)=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

$$\{\,|x+y|\le|x|+|y|\,\}$$

$$|S_2|=\left|\sum_{k=1}^{n}(t_k-y_k)\,\Delta x_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|(t_k-y_k)\underbrace{\Delta x_k}_{>0}\right|=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{|t_k-y_k|}_{\le\Delta x_k}\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\Delta x_k}_{\delta(P)}\cdot\Delta x_k\le$$



$$\le\sum_{k=1}^{n}\delta(P)\,\Delta x_k=\delta(P)\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k}_{=b-a}$$

$$=\delta(P)\,(b-a)$$

$$\Rightarrow\ \left|S(f,P_n,T_n)-S_1\right|=|S_2|\xrightarrow{\delta(P_n)\to 0}0$$

$$\Rightarrow\ \int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right).$$

Oznaczenie.

$f \in R(a,b) \iff f$ jest całkowalna na $\langle a,b\rangle$.

Własności. 1

- $f, g \in R(a,b) \Rightarrow f+g \in R(a,b)$

  i $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

- $f \in R(a,b) \Rightarrow \bigwedge_{c\in\mathbb{R}} cf \in R(a,b)$

  i $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

Tw. Jeżeli f jest funkcją ciągłą na $\langle a,b\rangle$, to jest ona całkowalna na $\langle a,b\rangle$.

Własność 2) Jeżeli $f \in R(a,b)$ oraz

$$\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle,$$

to $f \in R(c,d)$.

Własność 3). Jeżeli $f \in R(a,b)$ oraz $c \in (a,b)$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

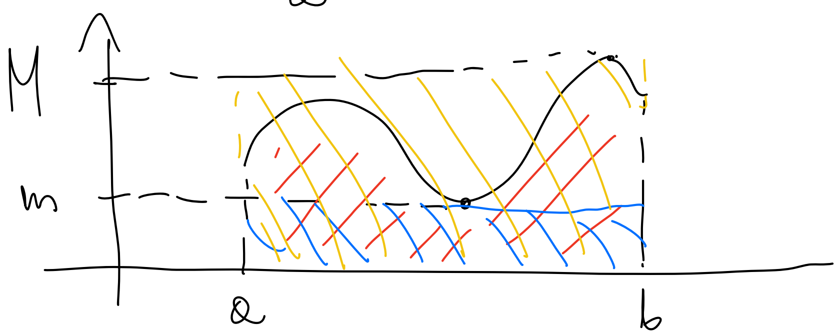
(addytywność względem drogi całkowania)

Wniosek 4) Jeżeli $f \in R(a,b)$ i

$$\bigwedge_{x \in \langle a,b \rangle} m \leq f(x) \leq M,$$

to

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$



$$\Rightarrow \quad f,g \in R(a,b) \quad \bigwedge_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Oznaczenia. $\quad f \in R(a,b)$

$$\left.\begin{aligned} \int_b^a f(x)\,dx &= -\int_a^b f(x)\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{oznaczenia}$$

$a,b,c \in \mathbb{R}$

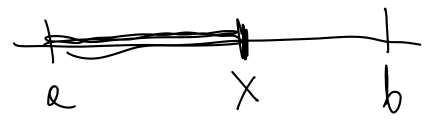
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

o ile wszystkie całki istnieją.

Tw. Niech $f \in R(a,b)$ i zdefiniujmy funkcję

$F : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$



Funkcja F jest ciągła na $\langle a,b \rangle$.

Dow. Niech $x_0 \in \langle a,b \rangle$ i h będzie tak dobrane, aby $x_0 + h \in \langle a,b \rangle$. Wtedy

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Niech M będzie dobrane w ten sposób, że

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in \langle a,b \rangle.$$

Wtedy

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,dt \leq M|x_0+h-x_0| = M|h|.$$

$$\bigwedge_{t \in \langle a,b \rangle} \underline{f(t) \leq |f(t)|}$$

$$\Rightarrow |F(x_0+h) - F(x_0)| \leq M|h|$$

Przy $h \to 0$ otrzymujemy $F(x_0+h) \to F(x_0)$.

Tw. (Newton-Leibniz)

Niech $f \in R(a,b)$ i załóżmy, że f jest ciągła w punkcie $x_0 \in \langle a,b \rangle$. Wtedy funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Def. Jeżeli dla funkcji $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ istnieje funkcja $G : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$, dla której

$$G'(x) = f(x), \quad x \in \langle a,b \rangle,$$

to G nazywamy funkcją pierwotną funkcji f.

Tw. N-L $\Rightarrow$ Jeżeli f jest ciągła na $\langle a,b \rangle$, to $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ jest funkcją pierwotną funkcji f.

Każda funkcja pierwotna G jest postaci

$$G(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

dla pewnego $C \in \mathbb{R}$.

Wzór Newtona-Leibniza.

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Przykład.

$f(x) = x$, $x \in \langle a, b \rangle$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$