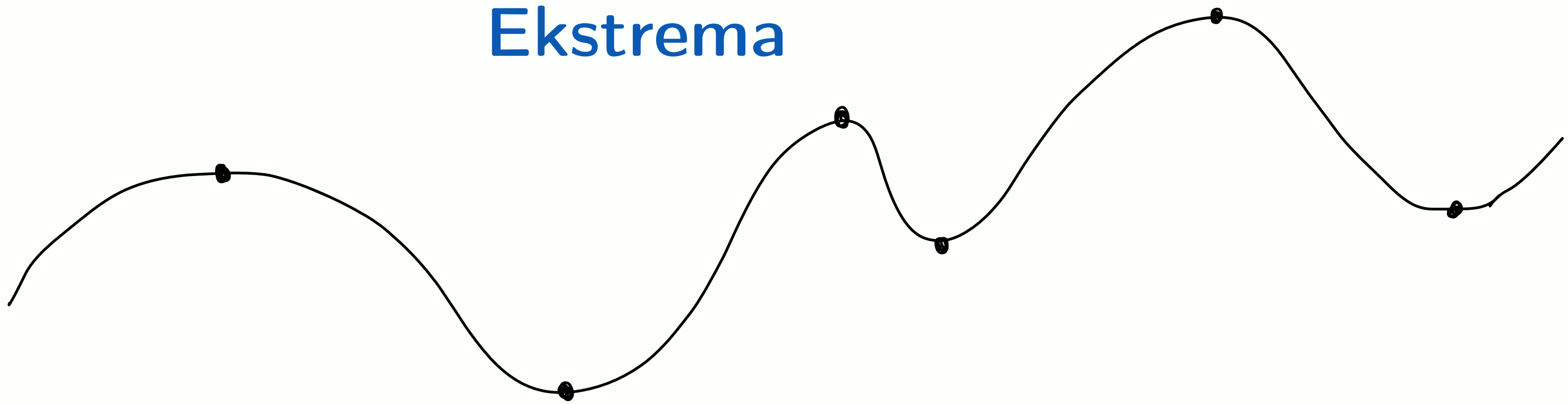
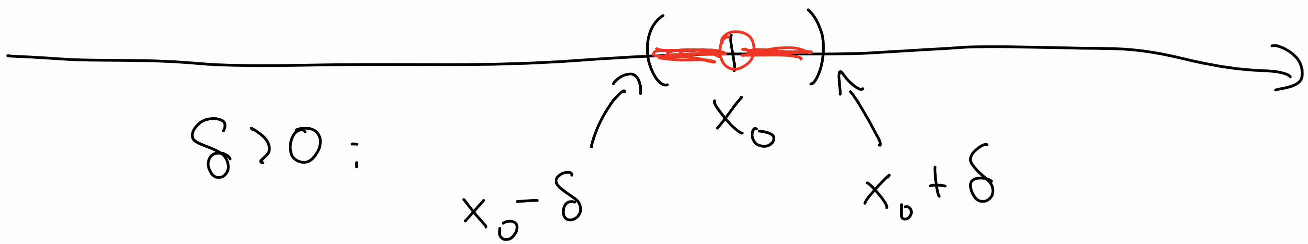
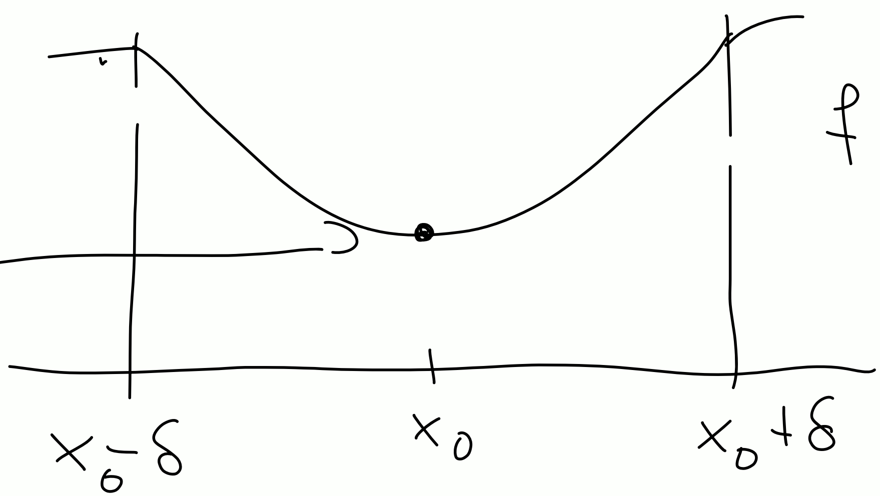
Ekstrema



$\delta > 0$:



$$S(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$



minimum lokalne

$f(x_0) < f(x)$ dla $x \in S(x_0, \delta)$

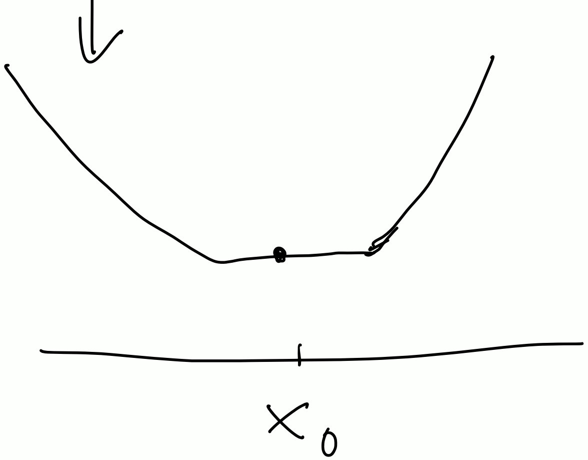
Ekstrema

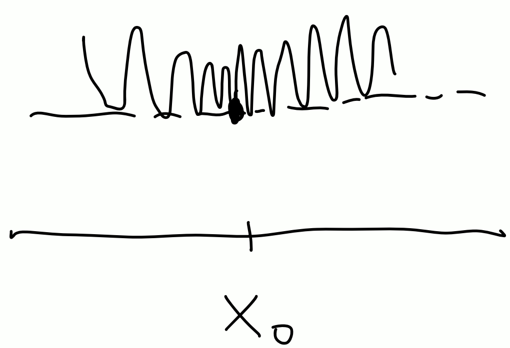
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum lokalne**, jeżeli

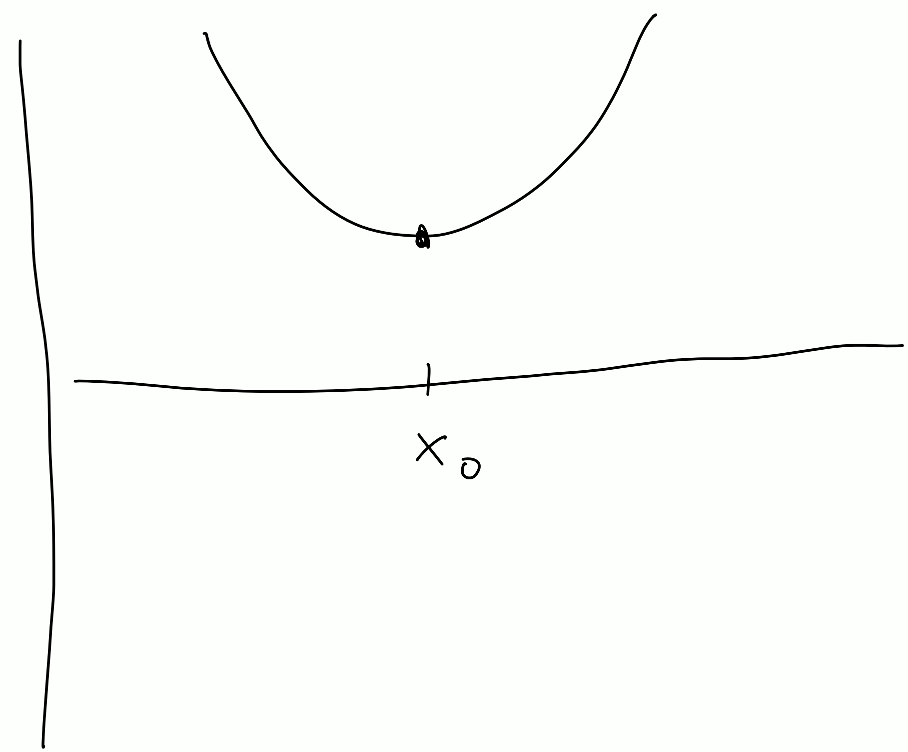
$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) \geqslant f(x_0).$$

$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D_f$

Jeżeli nierówność $\geqslant$ zamienimy na $>$, to powiemy, że jest to **minimum lokalne właściwe**.





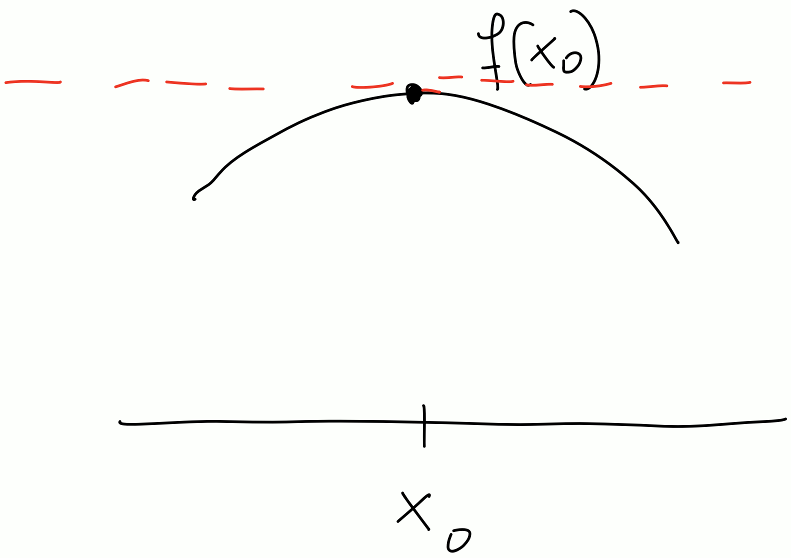


Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Jeżeli nierówność $\leqslant$ zamienimy na $<$, to powiemy, że jest to **maksimum lokalne właściwe**.



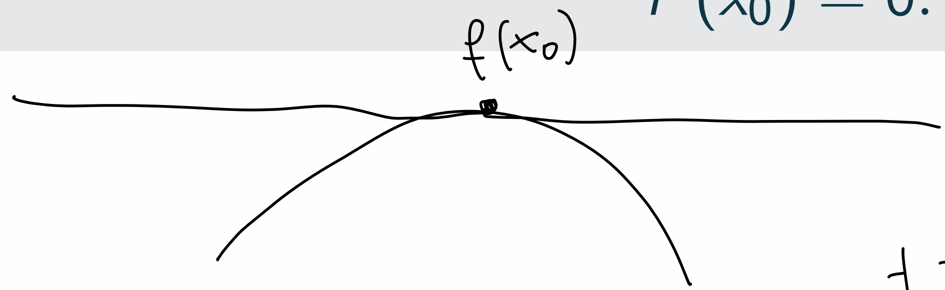
Warunek konieczny istnienia ekstremum

Twierdzenie Fermata

Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 $\in (a,b)$ ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$f'(x_0) = 0.$$

$$\boxed{f'_+(x_0) = - f'_-(x_0)}$$



stały znak w $S(x_0, \delta)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f'(x_0) = 0}$$

zmienia znak w $S(x_0, \delta)$

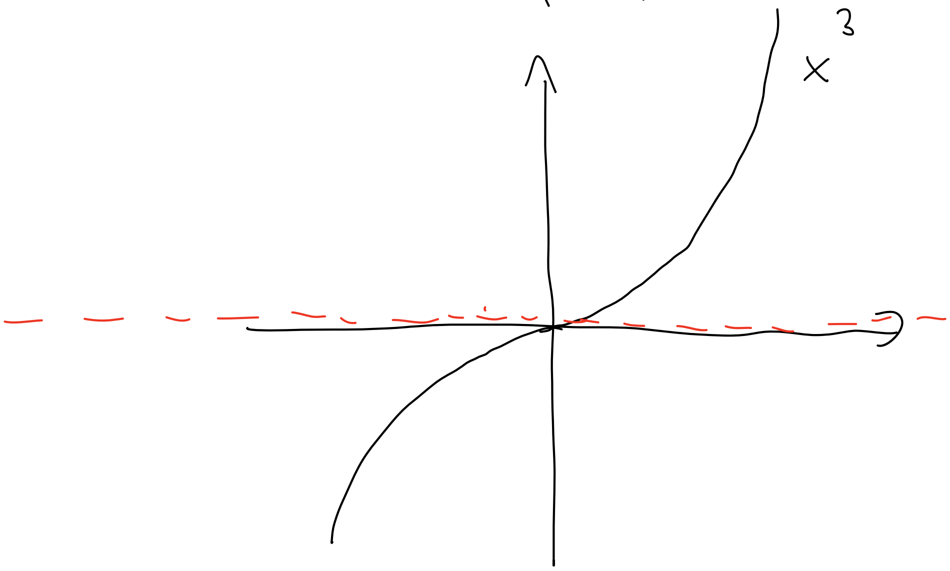
f ma ekstremum w x_0 $\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{maksimum} \\ \geq 0 & \text{minimum} \end{cases}$

Przykład.

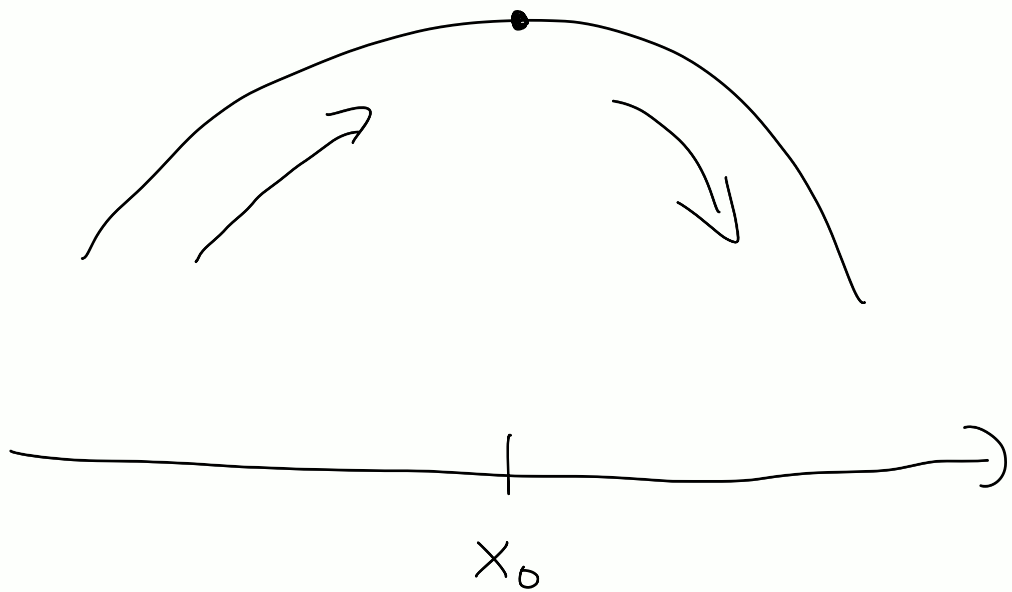
$f(x) = x^3$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(0) = 0$



Warunek dostateczny istnienia ekstremum



$$\Updownarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

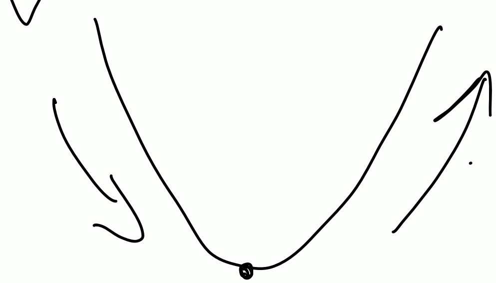
$$f'(x) \geq 0 \quad \text{dla } x < x_0$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{dla } x > x_0$$

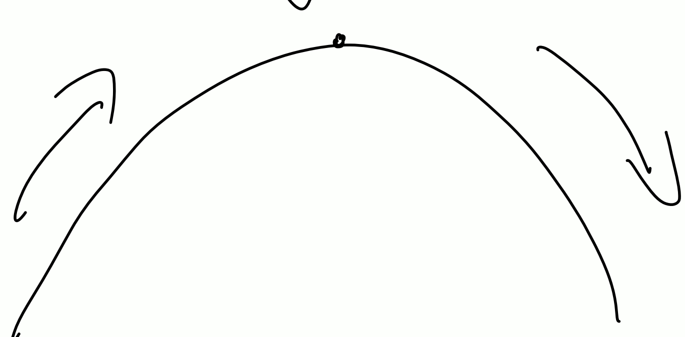
Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Niech funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie **ciągła** w punkcie x_0 oraz dla pewnego $\delta > 0$ **różniczkowalna** w zbiorze $S(x_0, \delta)$.

- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe,
- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.



minimum



maksimum

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)\underline{(x - x_0)}$$

$$c \in (x_0, x) \lor c \in (x, x_0)$$

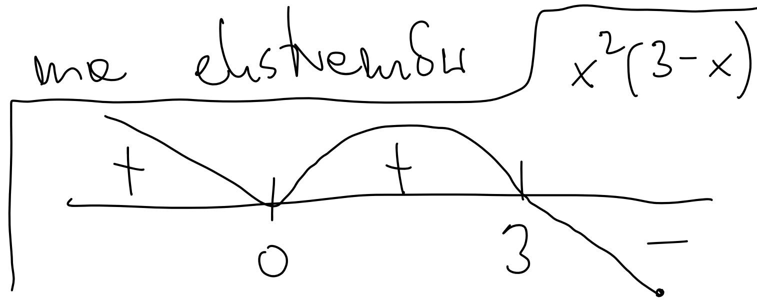
Przykład.

$$f(x) = x^3 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = \boxed{\underbrace{e^{-x}}_{>0} \cdot \underbrace{x^2}_{\geq 0} \underline{(3-x)}}$$

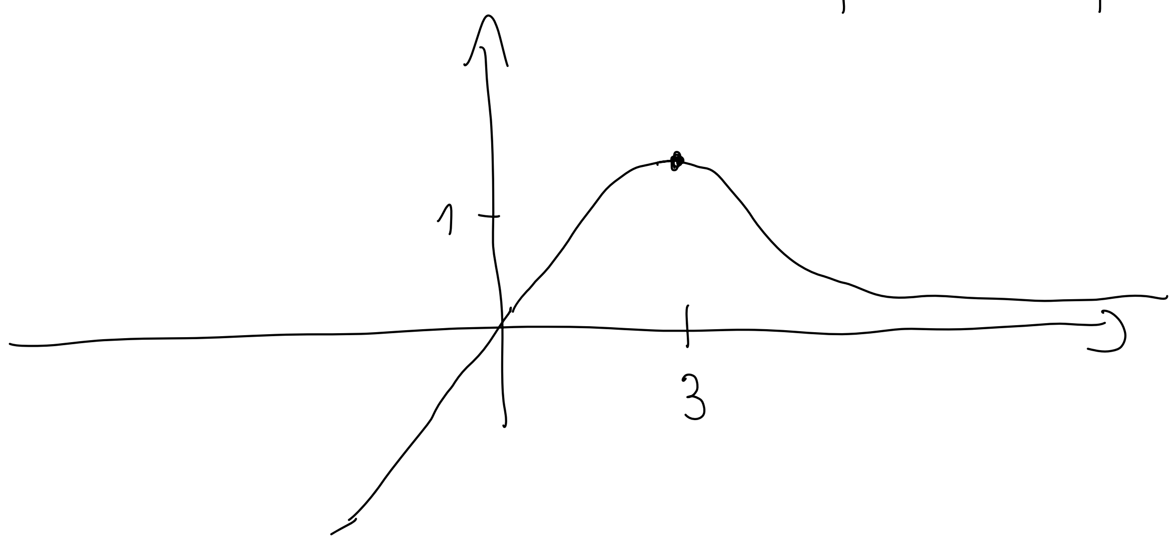
$$f'(x) = 0 \iff x^2(3-x) = 0 \iff \underline{x = 0 \lor x = 3}$$

Tw. Fermata $\Rightarrow$ w punktach $x \neq 0$ i $x \neq 3$ nie ma ekstremów



x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	brak ekstremum	$\nearrow$	maksimum lokalne	$\searrow$

$f(3) = 27e^{-3}$



Warunek dostateczny istnienia ekstremum

f, $\boxed{f'(x_0) = 0}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

$c \in (x_0, x)$ v $c \in (x, x_0)$

$$\Leftrightarrow \underline{f(x) - f(x_0)} = \underbrace{\frac{f''(c)}{2!}\underline{(x - x_0)^2}}_{} \geq 0$$

znak ↑ zależy wyłącznie od $f''(c)$

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodną f' oraz istnieje druga pochodna $f''(x_0)$. i f'' jest ciągła w otoczeniu x_0

Jeżeli

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f''(x_0) \neq 0,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f''(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f''(x_0) > 0$.

$f(x) = x^3 e^{-x}$, $f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}$,

$$f''(x) = 6x e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x} =$$

$$= e^{-x} x (6 - 6x + x^2)$$

$f''(0) = 0 \implies$? NIE WIADOMO

$f''(3) = e^{-3} \cdot 3 \cdot (-3) < 0 \implies$ w $x_0 = 3$ jest maksimum

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodne do rzędu $n-1$, a pochodna $f^{(n)}(x_0)$ istnieje.

Jeżeli

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

i n jest liczbą **parzystą**, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

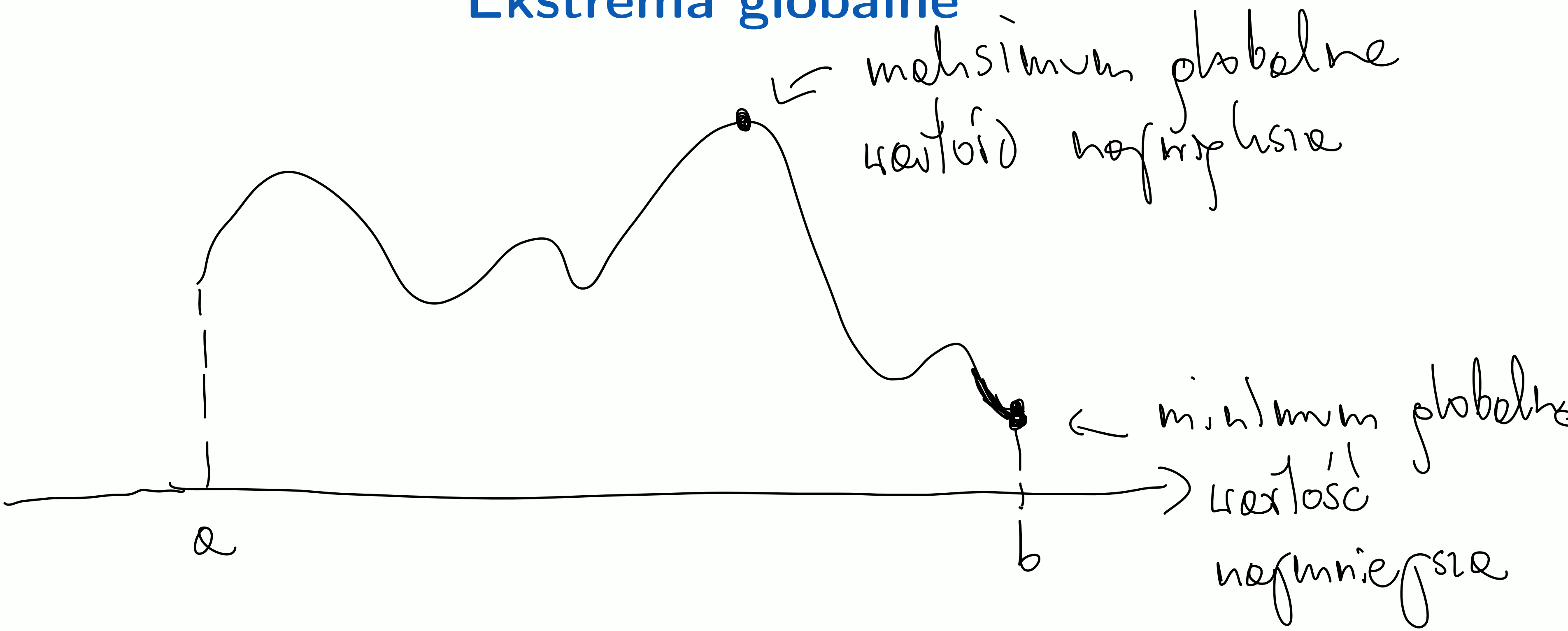
Jeżeli liczba n jest nieparzysta, to funkcja nie posiada ekstremum w punkcie x_0.

ćw.

$f(x) = x^3 e^{-x}$ $\quad f'(0) = f''(0) = 0$

$\underline{f'''(0) \neq 0}$

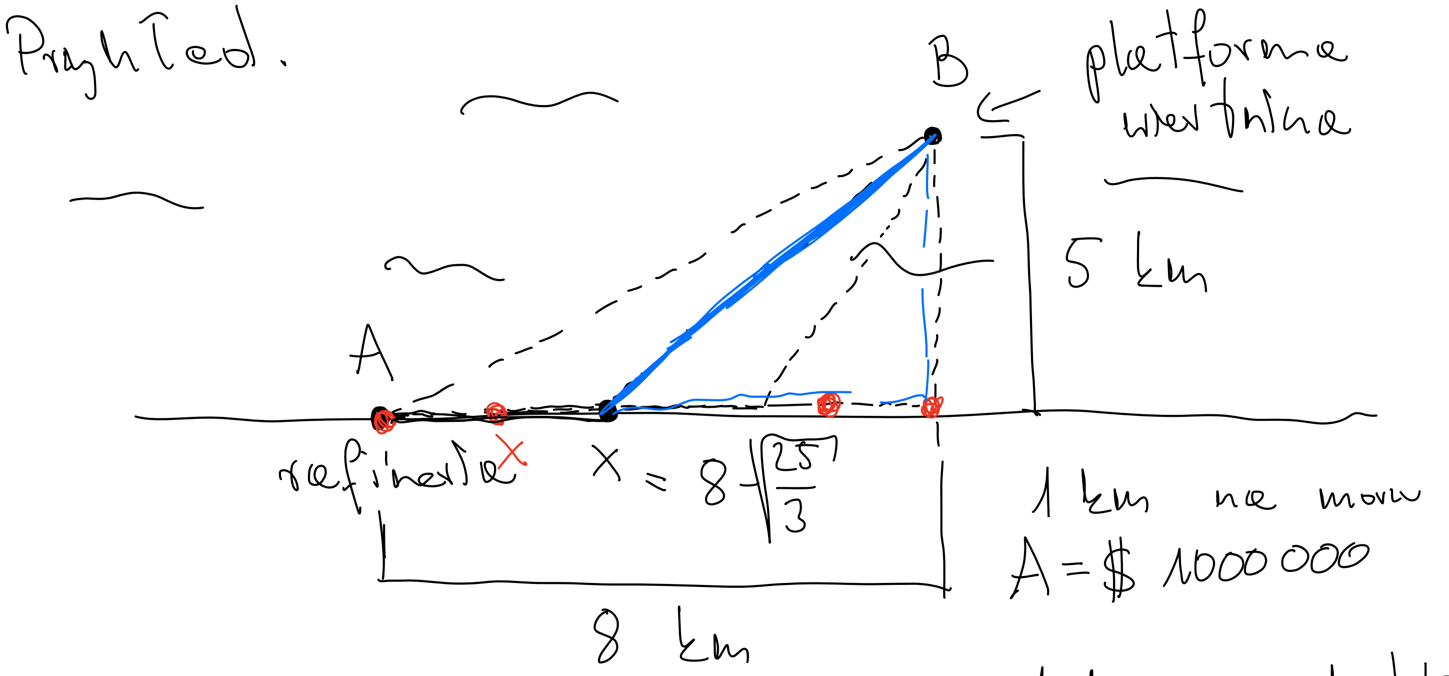
Ekstrema globalne



$f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f' istnieje w (a, b)
f - ciągła w $\langle a, b\rangle$

1. $f'(x) = 0$? $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in (a, b)$
2. $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), f(a), f(b)$
3. Wybieramy największą i najmniejszą z wartości w pkt. 2.

Przykład.



1 km na morzu
$A = \$\ 1000\,000$

1 km na lądzie
$B = \$\ 500\,000$

$f(x) \leftarrow$ koszt budowy

$$f(x) = \underbrace{x \cdot B + \sqrt{(8-x)^2 + 5^2} \cdot A}, \quad x \in \langle 0, 8 \rangle$$

$$f'(x) = B + \frac{1}{2\sqrt{(8-x)^2+25}} \cdot 2(8-x)(-1) \cdot A =$$

$$= B - A\frac{8-x}{\sqrt{(8-x)^2+25}}$$

$$\frac{A}{B} = 2$$

$$f'(x) = 0 \iff B = A\frac{8-x}{\sqrt{(8-x)^2+25}} \iff B\sqrt{(8-x)^2+25} = 8-x$$

$$\iff B^2\left((8-x)^2 + 25\right) = (8-x)^2 A^2 \iff 3(8-x)^2 = 25$$

$$\iff (8-x)^2 = \frac{25}{3} \iff |8-x| = \sqrt{\frac{25}{3}} \iff 8-x = \sqrt{\frac{25}{3}} \iff$$

$$\iff \boxed{x_1 = 8 - \sqrt{\frac{25}{3}}}$$

$f(0),\ f(8),\ f(x_1)$

Przykład

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \vee \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Reguła de l'Hospitala

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki: f i g sp dwieślone w otoczeniu x_0

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0),
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-3x+2)'}{(x^2-4x+3)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{2x-4} = \left[\frac{-1}{-2}\right] = \frac{1}{2}$$

Niech $x \neq x_0$ leży w otoczeniu x_0 i

$$A_x = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Zdefiniujmy funkcję h wzorem

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t = x_0 \\ f(t) - A_x g(t), & t \neq x_0. \end{cases}$$

Wtedy $h(x) = f(x) - A_x g(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Funkcja h jest określona na przedziale $\langle x, x_0 \rangle$ lub $\langle x_0, x \rangle$ oraz

$$h(x_0) = h(x) = 0.$$

Ponieważ f' i g' istnieje w $\langle x_0, x \rangle$ lub $\langle x, x_0 \rangle$, to h jest funkcją różniczkowalną na (x_0, x) lub (x, x_0).

Ponadto h jest ciągła na $\langle x_0, x \rangle$ lub $\langle x, x_0 \rangle$, gdyż $\lim_{t \to x_0} h(t) = \lim_{t \to x_0} \left(f(t) - A_x g(t) \right) = 0 - A_x 0 = 0 = h(x_0)$.

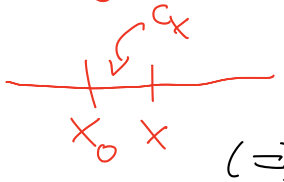
Spełnione są założenia tw. Rolle'a.

Tw. Rolle'a $\Rightarrow \bigvee_{c_x \in (x_0, x) \vee c_x \in (x, x_0)} h'(c_x) = 0$.

$$\Updownarrow \qquad \left\{ h'(t) = f'(t) - A_x g'(t), \quad t \neq x_0 \right.$$

$$f'(c_x) - A_x g'(c_x) = 0$$

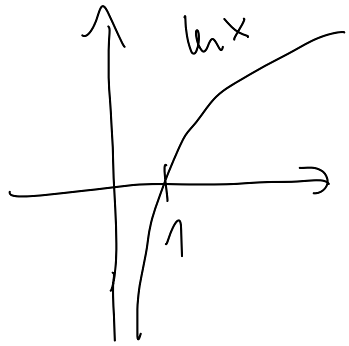
$$\{ x \to x_0 \Rightarrow c_x \to x_0 \}$$



$$\Leftrightarrow \quad A_x = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[c_x \to x_0]{x \to x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

istnieje z założenia

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$, $D=(0,+\infty)$



$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \left[0\cdot(-\infty)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(1/x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x^a\ln x$, $x>0$, $a\in\mathbb{R}$, $a>0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-a})'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{a}x^a\right) = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^a\ln x = 0 , \quad a>0}$$

Reguła de l'Hospitala

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

⇝ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, $\cancel{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty}$ ← TO NIE JEST KONIECZNE

⇝ f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Reguła de l'Hospitala: uwagi

- Obie reguły de l'Hospitala są prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w $+\infty$ lub w $-\infty$.
- Reguły de l'Hospitala można również wykorzystywać do obliczania granic typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x} = [+\infty \cdot 0]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$

(4) $$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$n \in \mathbb{N}$

$n=2$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

$\xrightarrow{x\to+\infty} 0$

$n=3$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} = 0$$

$\xrightarrow{x\to+\infty} 0$

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

---

(5) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{x+\sin x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+\sin x)'}{(x+\sin x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{1+\cos x} \quad \text{NIE ISTNIEJE}$$

$\cos x \xrightarrow{x\to+\infty}$ nie istnieje

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 2$$

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

⑥ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$?

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$(\sin x)' = \cos x$?

wykorzystujemy fakt, że $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \dots = \cos x_0$$