Pochodne jednostronne

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

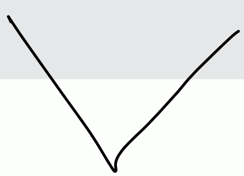
o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0.

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną prawostronną** funkcji f w punkcie x_0.

$f(x) = |x|$



$f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$

Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $\langle a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a.

Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $\langle a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a.

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $(a, b\rangle$ i ma pochodną lewostronną w b, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w b.

Pochodne wyższych rzędów

$f(x) = \ln x \quad , \quad \underline{x > 0}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$(f')'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

$((f')')'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$\vdots$

f

f'

f''

f'''

$\vdots$

$f^{(n)}$

Pochodne wyższych rzędów

Określoną indukcyjnie liczbę

$f^{(0)} = f$

$$f^{(n)}(x_0) = \begin{cases} f(x_0), & n = 0, \\ \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0), & n \geqslant 1, \end{cases}$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną n-tego rzędu** funkcji f w punkcie x_0.

$(e^x)^{(n)} = e^x$

$(\arcsin x)^{(n)} = ?$

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$$

$(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g'$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

$(f \cdot g)^{(n)} = ?$

Pochodna n-tego rzędu iloczynu

Wzór Leibniza

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne n-tego rzędu w punkcie x_0, to

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0)$$

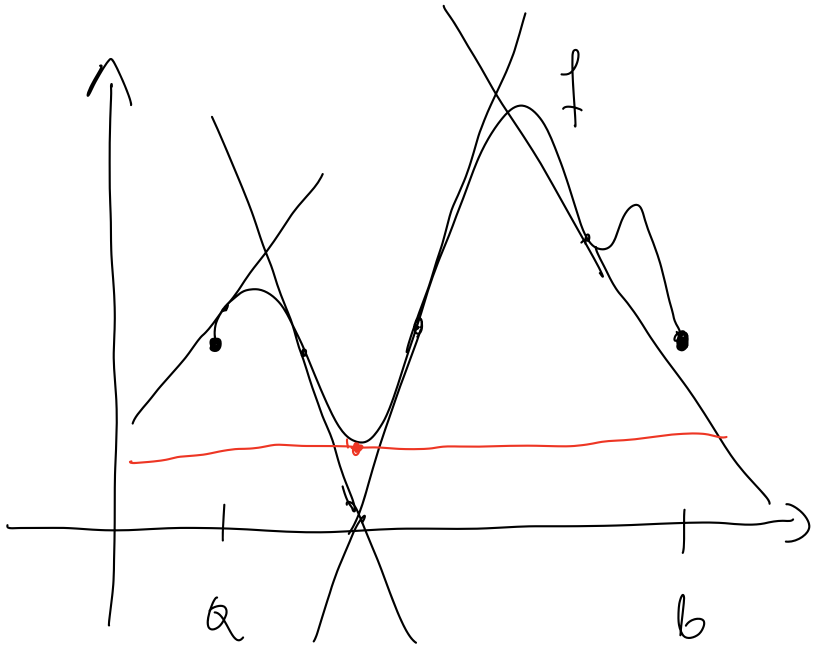
ćw.

indukcja

$$(\sin x \, e^x)^{(3)} = \binom{3}{0}\sin'''(x)(e^x)^{(0)} + \binom{3}{1}\sin''(x)(e^x)' + \binom{3}{2}\sin'(x)(e^x)'' + \binom{3}{3}\sin^{(0)}(x)(e^x)''' =$$

$$= -\cos x \, e^x + 3(-\sin x)e^x + 3\cos x \, e^x + \sin x \, e^x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(n)} = \ ?$$



f
a
b

Twierdzenie Rolle'a

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b), a dodatkowo $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = 0.$$

$f(c) \geq f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$

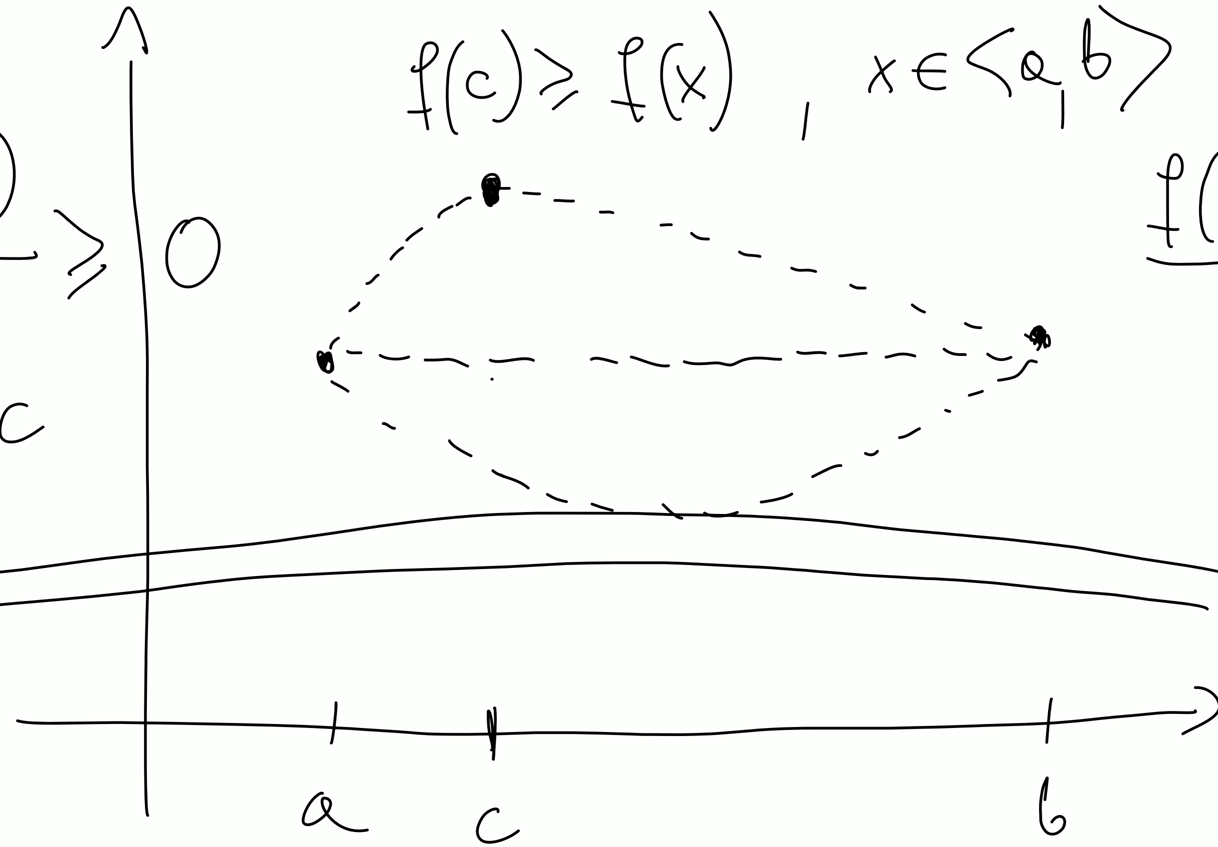
$\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ dla $x < c$

$\Downarrow$

$f'_-(c) \geq 0$

$\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$, $x > c$

$f'_+(c) \leq 0$

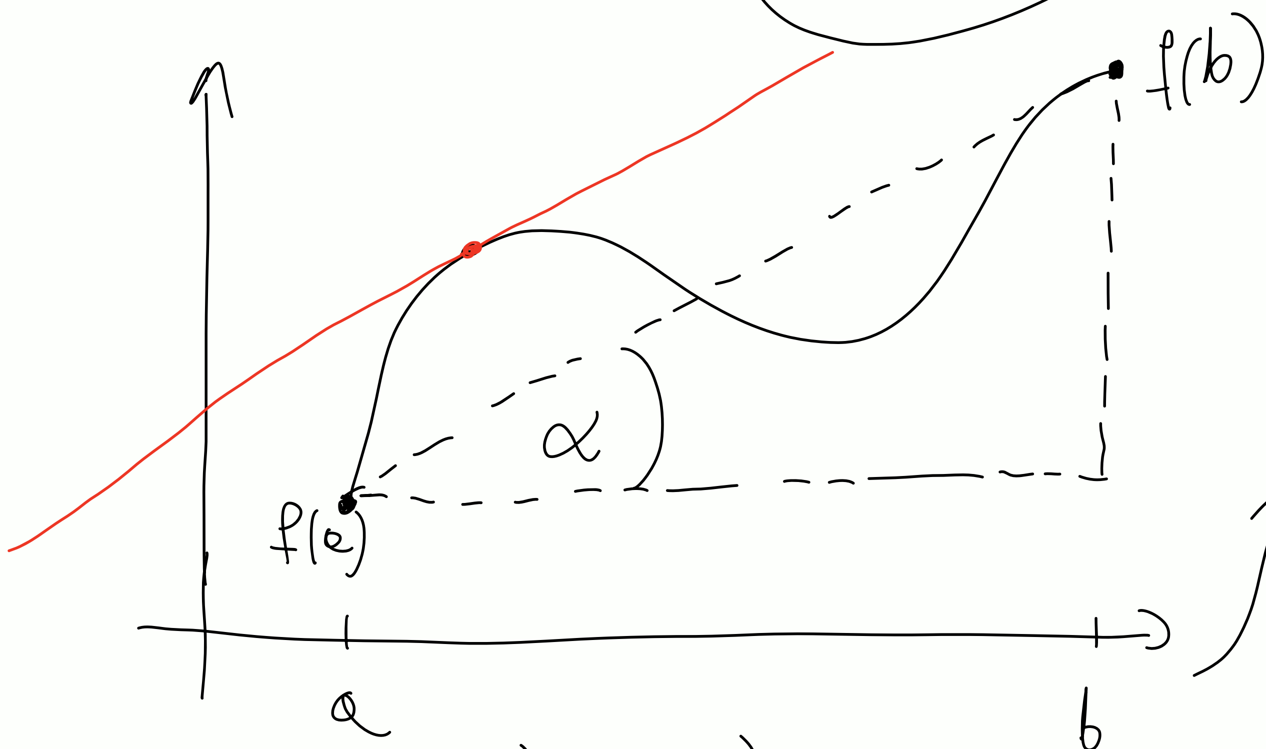


$f'(c) = 0$.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad = \operatorname{tg} \alpha$$



$g(a) = 0$

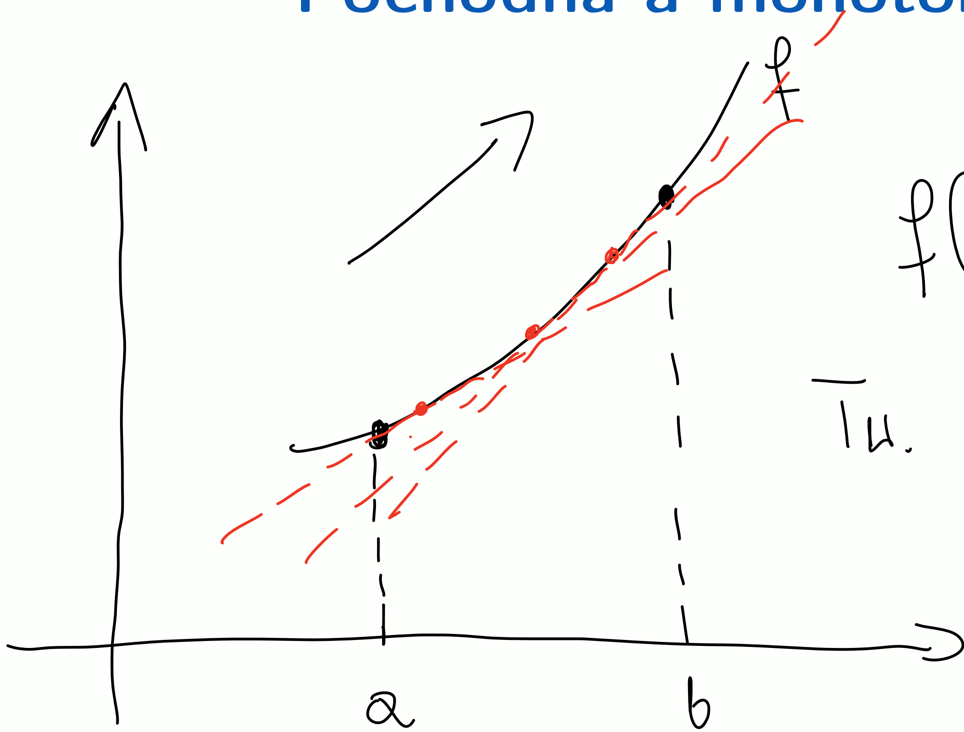
$g(b) = 0$

Tw. Rolle'a dla g.

Dow.

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \big(f(x) - f(a)\big)$$

Pochodna a monotoniczność



$$f(a) \overset{?}{<} f(b)$$

Tw. Lagrange'a

$\Downarrow$

$$\boxed{f(b)-f(a)} = f'(c)\overset{+}{(b-a)}$$

dla pewnego $c \in (a,b)$

Znak $f(b)-f(a)$ zależy wyłącznie od znaku $f'(c)$.

Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$, to $f(b)-f(a) > 0$.

$ < 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad < 0$

Pochodna a monotoniczność

Niech funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I. Wtedy:

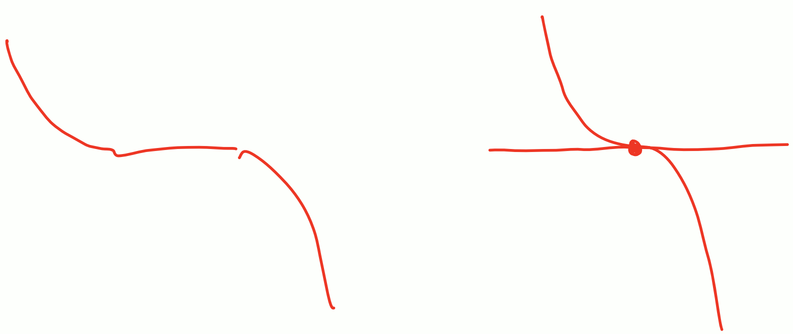
- f jest stała na $I \iff f' = 0$ wewnątrz I.
- f jest rosnącą na $I \iff f' \geqslant 0$ wewnątrz I.
- f jest malejąca na $I \iff f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

$f(a) \leqslant f(b)$ dla $a < b$

$f(a) \geqslant f(b)$ dla $a < b$

$f(a) = f(b)$, $a, b \in I$

$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$



Pochodna a monotoniczność

Niech funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I. Wtedy:

- $\rightsquigarrow$ f jest stała na I $\iff$ $f' = 0$ wewnątrz I.
- $\rightsquigarrow$ f jest rosnącą na I $\iff$ $f' \geqslant 0$ wewnątrz I.
- $\rightsquigarrow$ f jest malejąca na I $\iff$ $f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

Jeżeli ponadto funkcja f' nie jest stale równa 0 na żadnym podprzedziale przedziału I, to

- $\rightsquigarrow$ f jest **ściśle** rosnącą na I $\iff$ $f' \geqslant 0$ wewnątrz I.
- $\rightsquigarrow$ f jest **ściśle** malejąca na I $\iff$ $f' \leqslant 0$ wewnątrz I.