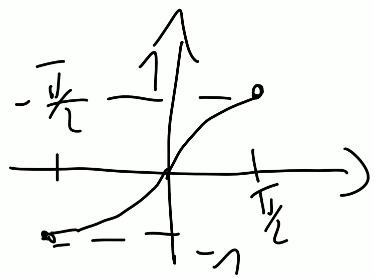
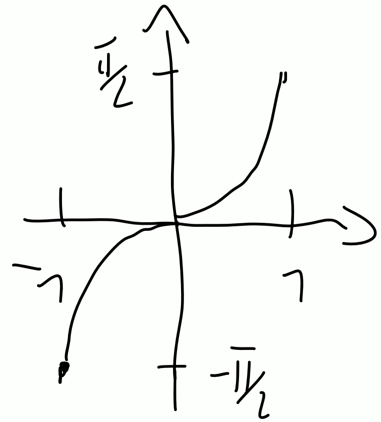
Przykład

$\sin : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \to \langle -1, 1 \rangle \qquad \arcsin : \langle -1, 1 \rangle \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$





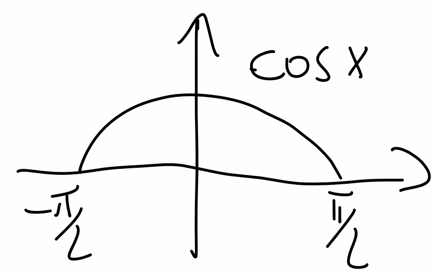
$y_0 \in (-1, 1)$

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin(y_0))} =$$

$$= \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin(y_0)}_{\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)})} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ |\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} \\ \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \\ \text{o ile } \cos x \geq 0 \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y_0))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}$$

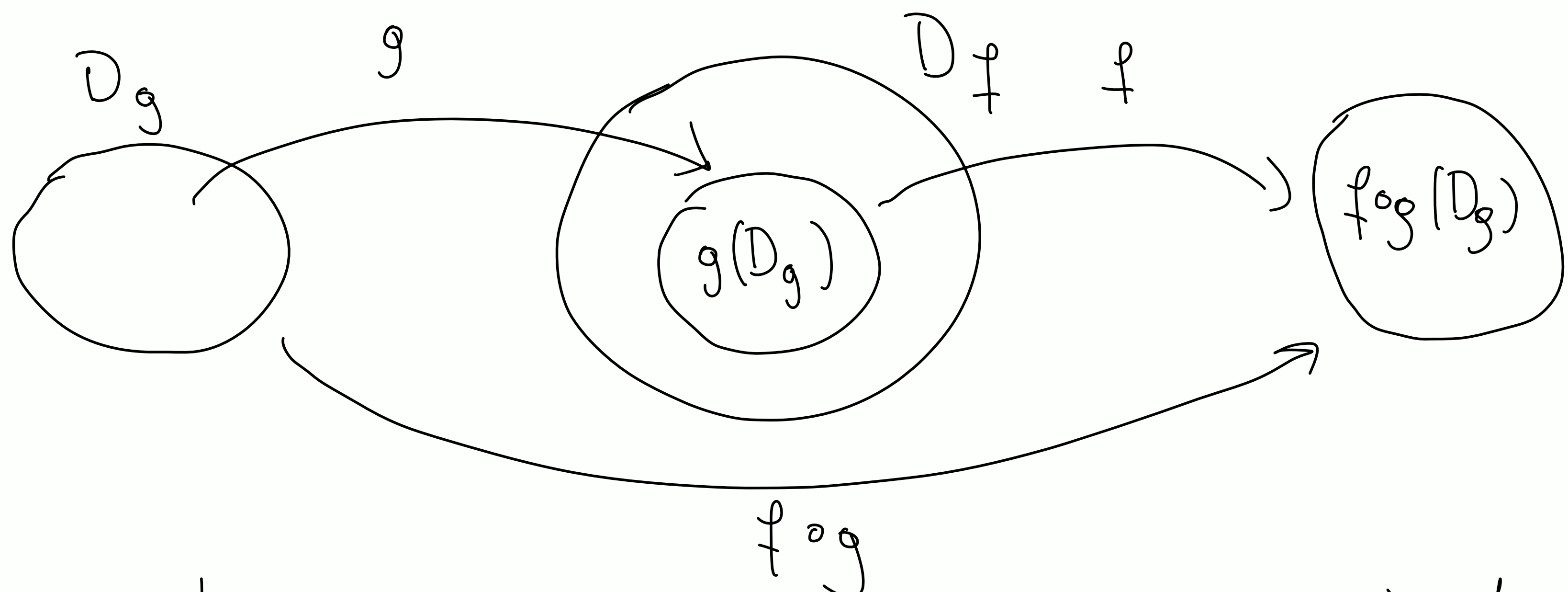


Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja g ma pochodną w punkcie x_0, a funkcja f ma pochodną w punkcie $g(x_0)$, to

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).$$



$$\big(\sin(\ln x)\big)' = \sin'(\ln x) \cdot (\ln x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

Dowód

~~Przykład~~

$$(f(g))' = f'(g)\cdot g'$$

$$f'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} - f'(y_0) = r(y)$$

$$\lim_{y\to y_0} r(y) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$f(y)-f(y_0) = f'(y_0)(y-y_0)+r(y)(y-y_0)$$

$$(*)\quad r(y) \xrightarrow{y\to y_0} 0.$$

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x-x_0} =$$

$$\{y=g(x),\ y_0=g(x_0)\}$$

$$= \frac{f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0)) + r(g(x))\cdot(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$

$$= f'(g(x_0))\cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\downarrow\, x\to x_0 \\ g'(x_0)}} + \underbrace{r(g(x))}_{\substack{(*)\ \downarrow\, \substack{x\to x_0 \\ g(x)\to g(x_0)} \\ 0}} \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\downarrow\, x\to x_0 \\ g'(x_0)}} \xrightarrow{x\to x_0} f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

Pochodne funkcji elementarnych

- $(c)' = 0$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \in \mathbb{R}$, dla $a < 0$ D odpowiednie
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Pochodne funkcji elementarnych

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Pochodne funkcji elementarnych

- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

- $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Algebraiczne własności pochodnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,
- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$. (ćw!)

1) $(3x^2)' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$

3) $(\sin x \cdot \ln x)' = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)' =$
$= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

Przykład

$$\boxed{f'(x_0),\ g'(x_0) \text{ istnieją}} \Rightarrow (f\cdot g)'(x_0) \text{ istnieje}$$

$$\text{i } \boxed{(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)}$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

$$\frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow\, x \to x_0 \\ f'(x_0)}} \underbrace{g(x)}_{\substack{\downarrow\, x \to x_0 \\ g(x_0)}} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow\, x \to x_0 \\ g'(x_0)}} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

ciągłość g w x_0

Pochodna logarytmiczna

$f(x) = x^x, \quad x > 0$

$f'(x) = ?$

$(\ln(f))' = \frac{1}{f} \cdot f' = \frac{f'}{f} \iff f' = f \cdot (\ln(f))'$

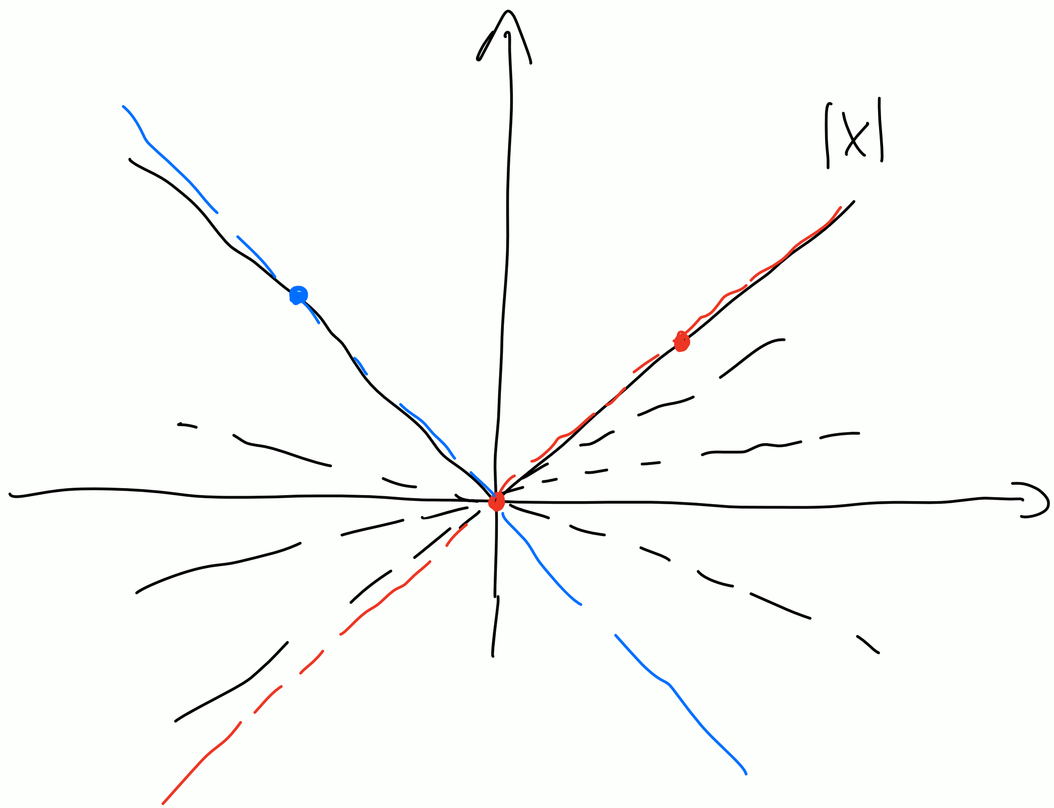
$\ln(x^x) = x \ln(x)$

$$\underbrace{(x^x)'}_{f} = x^x \cdot [x \ln(x)]' = x^x \left[\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] =$$

$$= x^x [\ln x + 1]$$

Ciągłość nie implikuje różniczkowalności

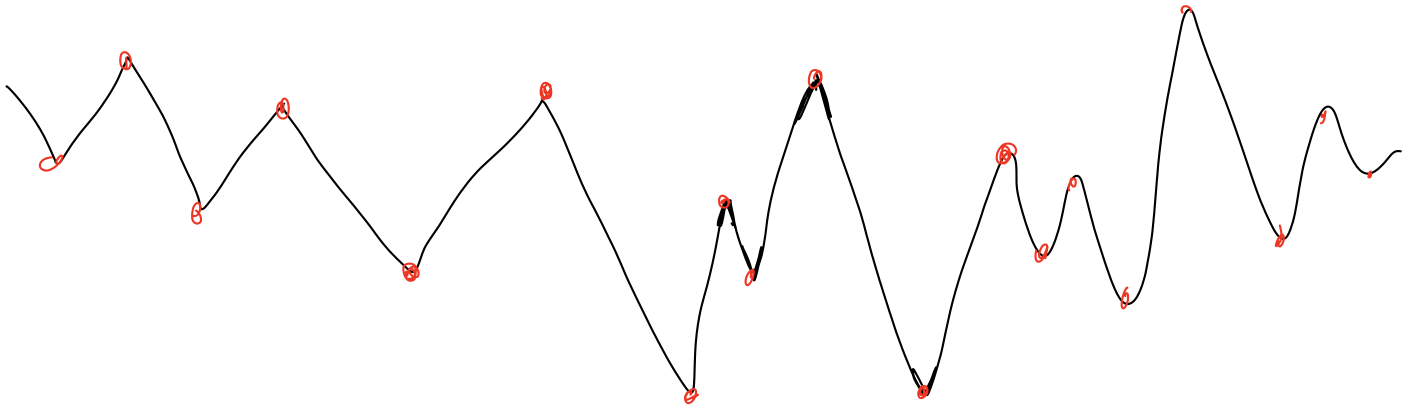
$f(x) = |x|$

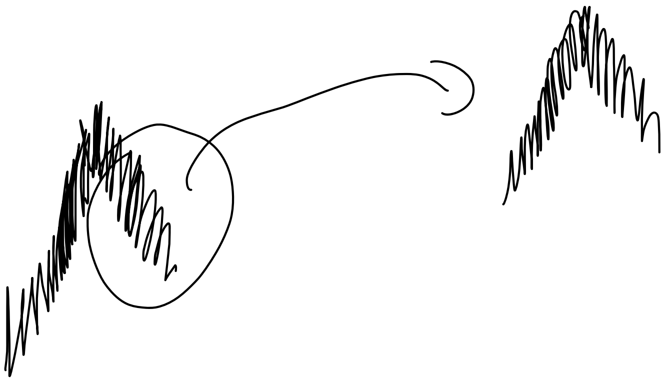


$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

$$1 \xrightarrow{x\to 0^+} 1, \qquad -1 \xrightarrow{x\to 0^-} -1, \qquad 1 \neq -1$$

$$(|x|)' = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

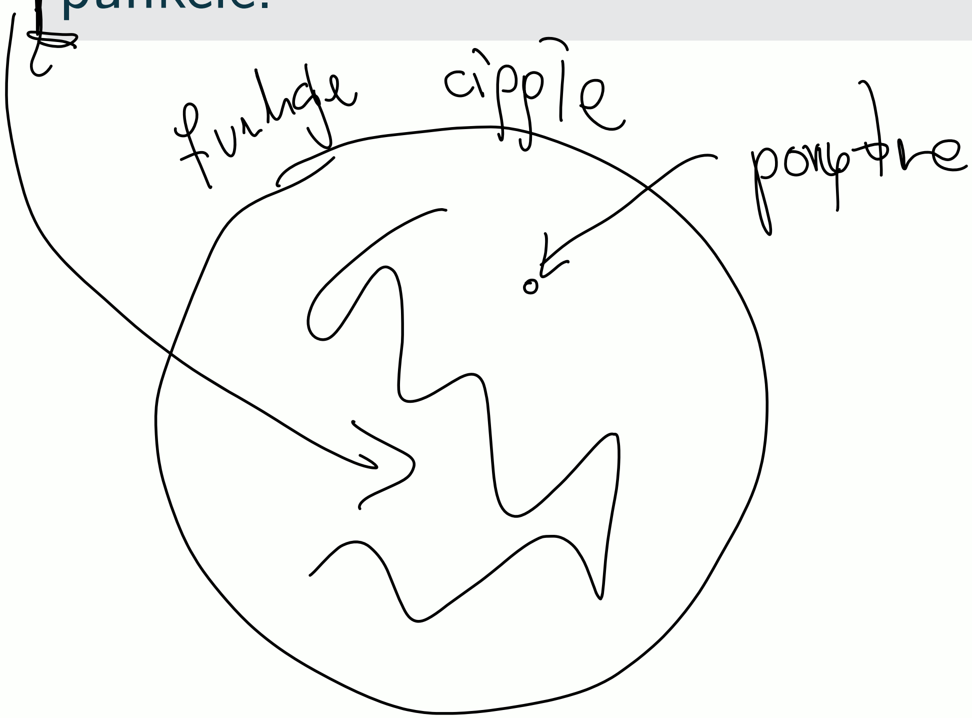




Ciągłość nie implikuje różniczkowalności

Twierdzenie

Istnieją funkcje ciągłe na $\mathbb{R}$, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie.



Brown 1827

1905, 1906

Einstein, Smoluchowski