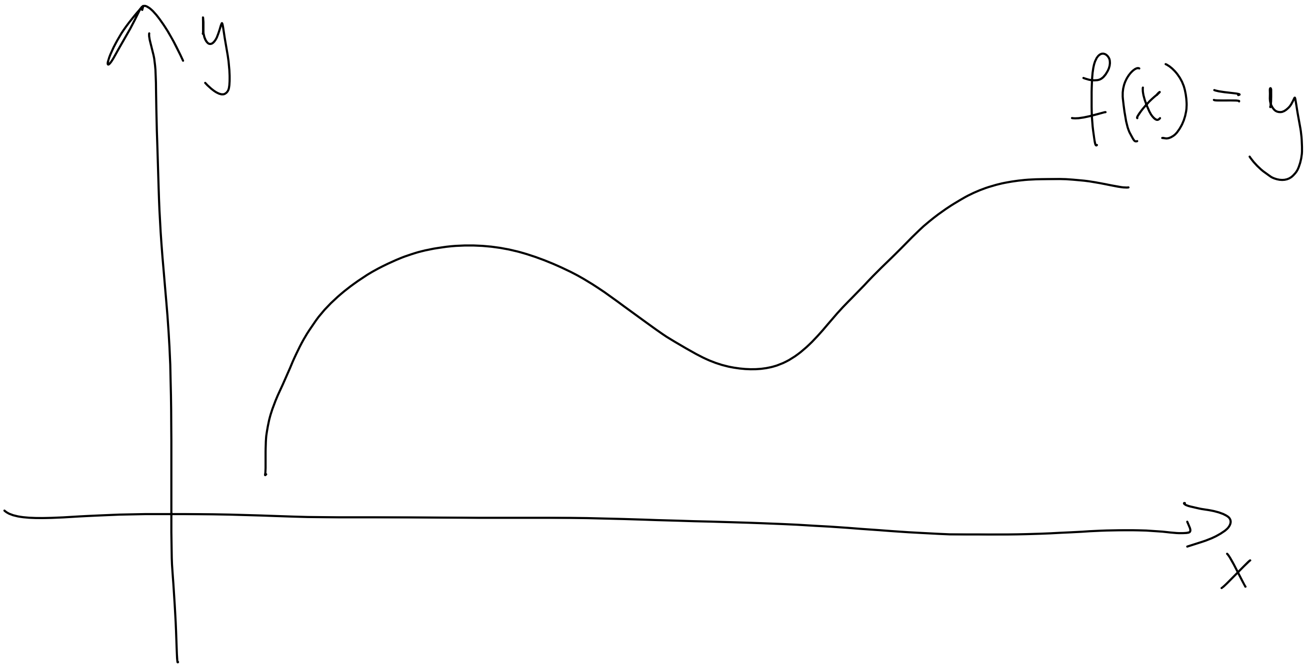
Rachunek różniczkowy

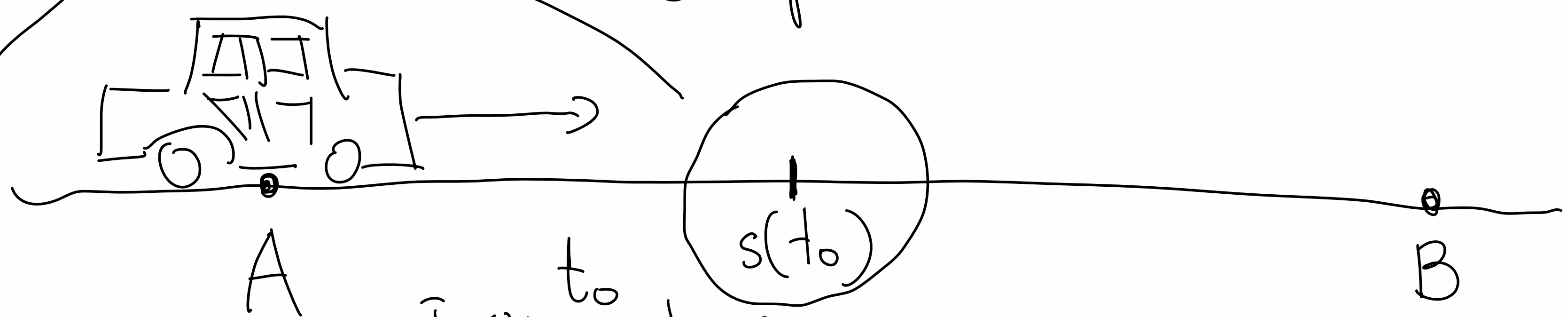


Newton, Leibniz

Intuicja fizyczna i geometryczna

t – czas

s – położenie

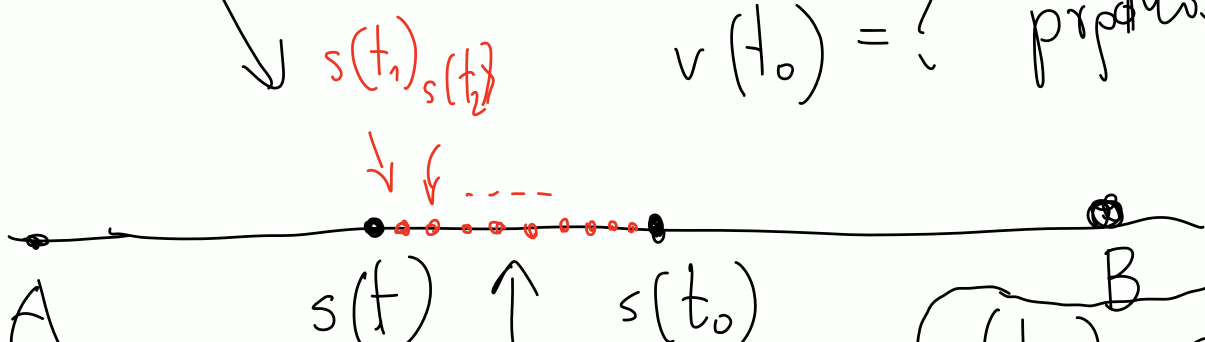


$$v = \frac{s}{t} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{cała droga} \\ \leftarrow \text{cały czas} \end{matrix}$$

– średnia prędkość

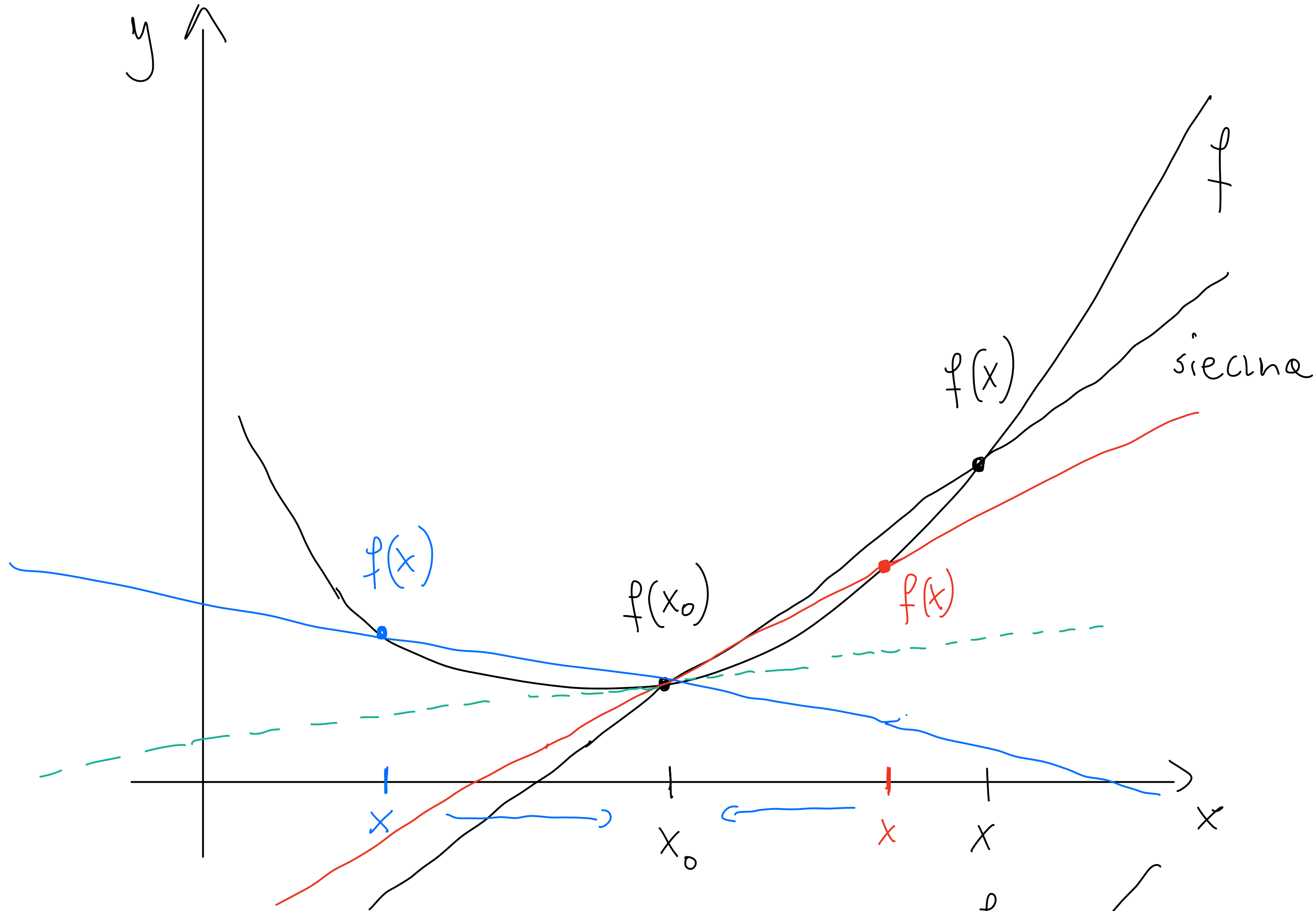
$t \neq t_0$

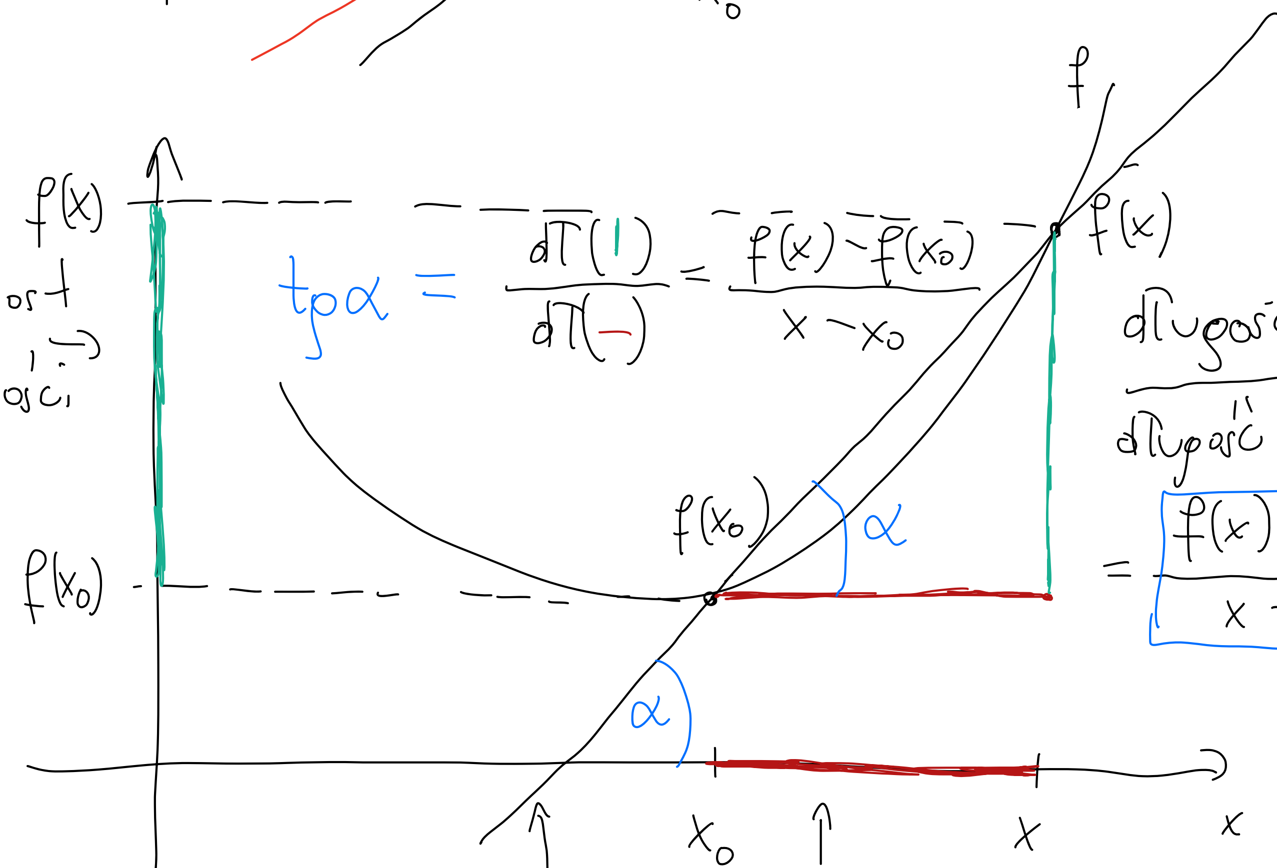
$v(t_0) = ?$ prędkość chwilowa w czasie t_0



$v_{\text{chwilowe}}(t_0)$ granica, gdy $t \to t_0$

$$v_{śr} = \boxed{\frac{s(t_0) - s(t)}{t_0 - t}}$$





przyrost wartości

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dł(|)}{dł(-)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\text{długość}(|)}{\text{długość}(-)} = \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$\operatorname{tg}\alpha$ ← współczynnik kierunkowy prostej

przyrost argumentu

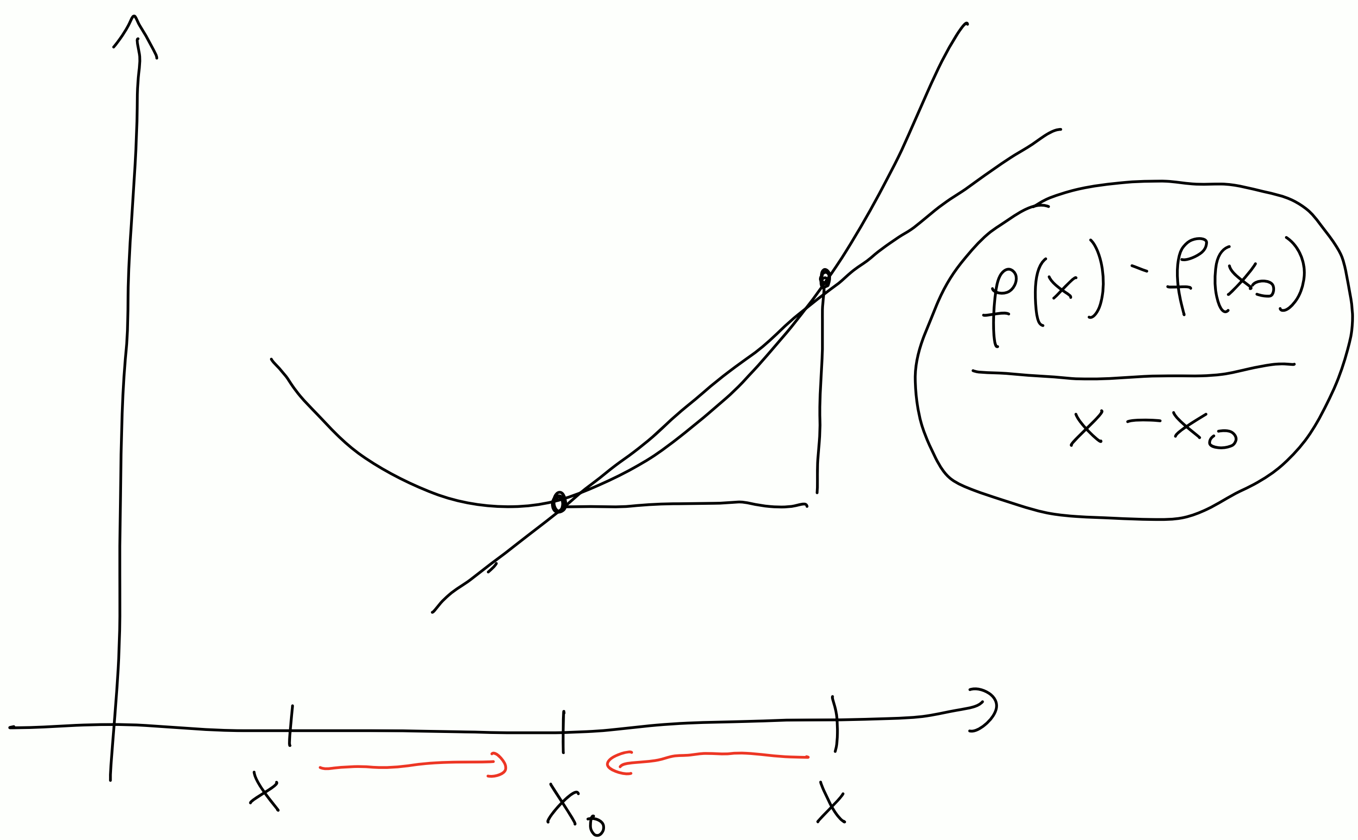
$x \to x_0$?

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ oraz $x, x_0 \in (a, b)$. Liczbę

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu $x - x_0$.

$x \neq x_0$!



Pochodna funkcji

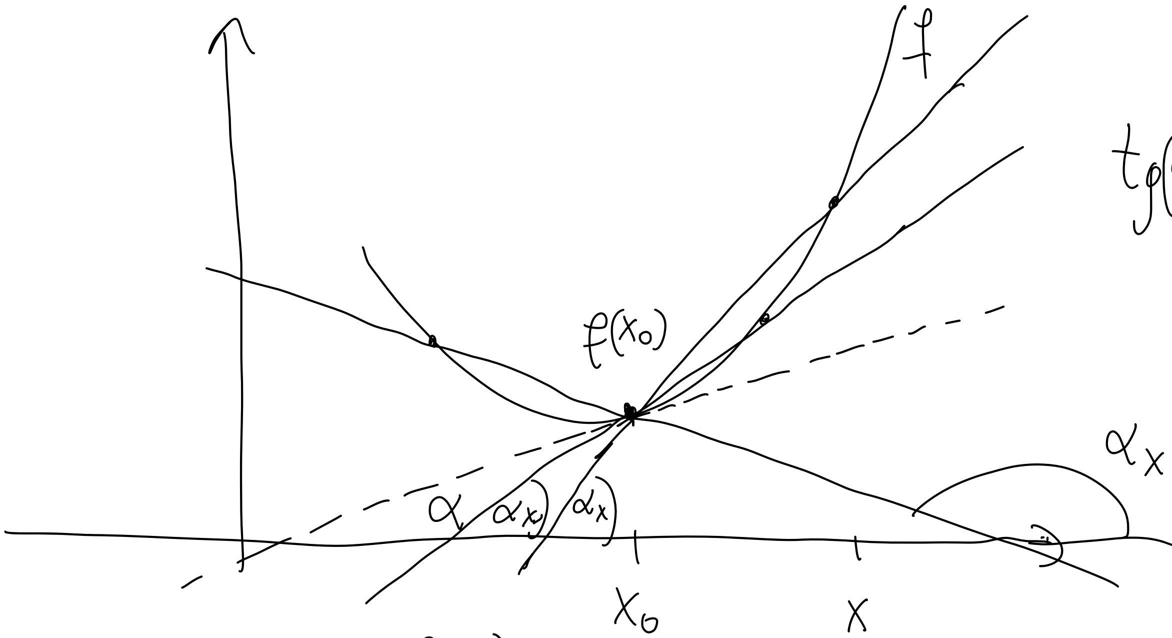
Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a,b)$. Jeżeli istnieje (właściwa) granica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji** f w punkcie x_0 i oznaczamy

$$f'(x_0).$$

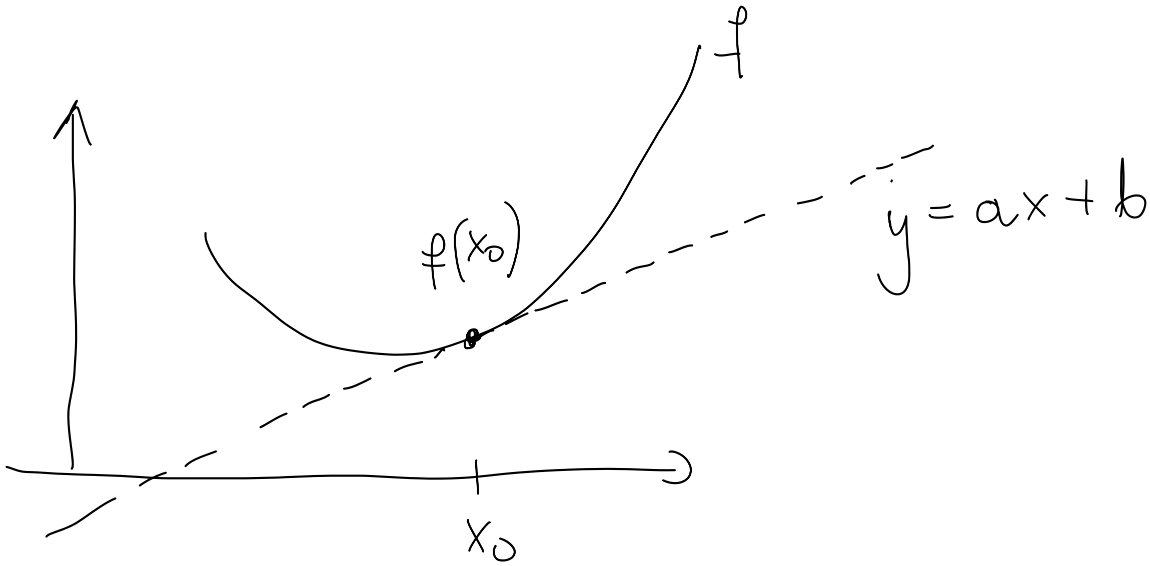
Mówimy wtedy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0.



$$\operatorname{tg}(\alpha_x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\operatorname{tg}(\alpha_x)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \operatorname{tg}\alpha$$



$$\begin{cases} f(x_0) = ax_0 + b \\ f'(x_0) = a \end{cases} \Rightarrow \quad b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} y = ax + b &= f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}}$$

Interpretacja geometryczna

Jeżeli $f'(x_0)$ istnieje, to prostą o równaniu

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

nazywamy **styczną** do wykresu funkcji f w punkcie x_0.

Związek z ciągłością

Twierdzenie

Funkcja różniczkowalna w punkcie jest w tym punkcie ciągła.

Dowód. f jest ciągła w p. $x_0 \in D_f = (a, b)$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$$

Jeżeli $f'(x_0)$ istnieje, to

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow\, x \to x_0 \atop f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\downarrow\, x \to x_0 \atop 0} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

z zał. o istnieniu $f'(x_0)$

Oznaczenia

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left| \begin{array}{l} x = x_0 + h \\ h = x - x_0 \\ x \to x_0 \iff h \to 0 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \Delta x = x - x_0$$

$\boxed{f'(x_0)}$	$\frac{df}{dx}(x_0)$	$\dot{f}(x_0)$	$Df(x_0)$
Lagrange	Leibniz	Newton	Euler

Przykład

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \xrightarrow{x \to x_0} 1$$

$$f'(x_0) = 1 \rightsquigarrow (x)' = 1$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} \xrightarrow{x \to x_0} 2x_0$$

$$f'(x_0) = 2x_0 \rightsquigarrow (x^2)' = 2x$$

$\boxed{\text{Ćw.}}$ $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$

Przykład

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\ln x,\quad x_0>0$$

Dla „małego" h: $\{\iff h>-x_0\}$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\left[\ln(x_0+h)-\ln(x_0)\right]=$$

$$=\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)=\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=\ln\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{1/h}\right]=$$

$$=\ln\left\{\boxed{\left[\left(1+\underset{\substack{\downarrow h\to 0\\ 0}}{\frac{h}{x_0}}\right)^{x_0/h}\right]}^{1/x_0}\right\}\xrightarrow{h\to 0}\ln\left(e^{1/x_0}\right)=\frac{1}{x_0}$$

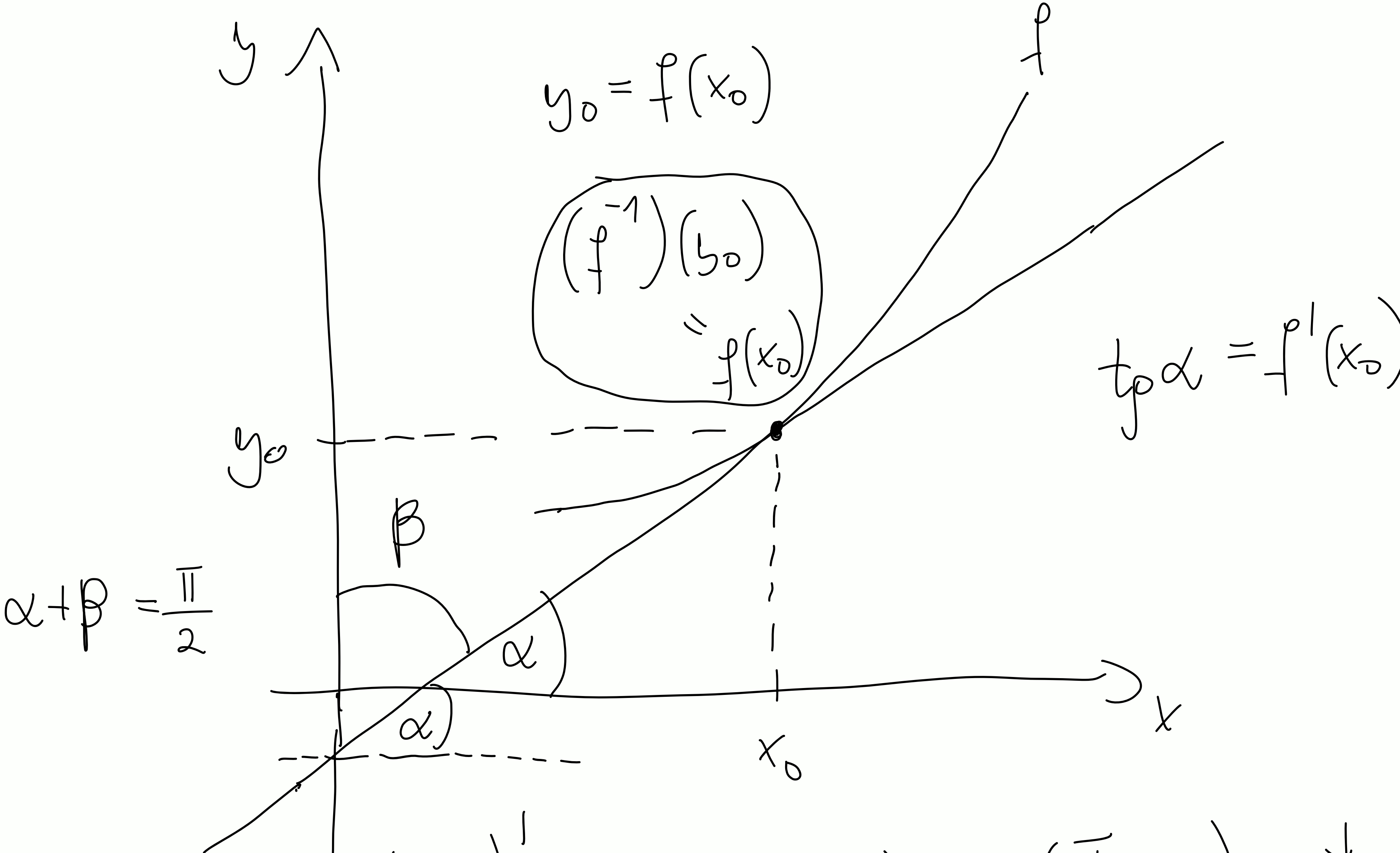
$$\Big\downarrow h\to 0$$

$$e$$

z ciągłości logarytmu i funkcji $x\mapsto x^{1/x_0}$

$$f'(x_0)=\frac{1}{x_0}\rightsquigarrow(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

Pochodna funkcji odwrotnej



$$(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg}(\beta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Pochodna funkcji odwrotnej

można osłabić

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ściśle monotoniczna oraz $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$