POLITECHNICZNA SIEĆ VIA CARPATIA

Politechnika Białostocka
POLITECHNIKA LUBELSKA
POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

do dodatkowych zajęć wyrównawczych z przedmiotu

matematyka

dla studentów kierunku/kierunków

informatyka

Opracował zespół w składzie:
Adam Gregosiewicz
Małgorzata Kubalińska
Ernest Nieznaj
Elżbieta Ratajczyk
Maciej Ziemba

Lublin 2023

WWW.VIACARPATIA.PRO

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Minister Edukacji i Nauki

1. Kombinatoryka

Zadanie 1.1. W pudełku znajduje się 5 kul o numerach 1, 2, 3, 4, 5.

a) Losujemy kolejno 3 kule i notujemy ich numery w kolejności losowania. Ile jest możliwych wyników takich losowań?

b) Z pudełka losujemy jedną kulę, zapisujemy jej numer i wkładamy ją z powrotem do pudełka. Następnie w ten sam sposób losujemy drugą i trzecią kulę. Ile jest możliwych wyników takich losowań?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich możliwych wyników losowania.

a) W tym przypadku Ω składa się z 3-elementowych ciągów utworzonych z różnych elementów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, tj.

$$\Omega = \{(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (2,1,3), \ldots, (5,4,3)\}.$$

Liczbę elementów zbioru Ω znajdujemy korzystając z uogólnionego prawa mnożenia. Mamy mianowicie

$$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60,$$

ponieważ pierwszą kulę możemy wylosować na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, a trzecią na 3 (wylosowane liczby nie mogą się powtarzać).

b) Tym razem Ω jest zbiorem 3-elementowych ciągów utworzonych z różnych lub powtarzających się elementów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, tj.

$$\Omega = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,1,5), (2,1,1), \ldots, (5,5,5)\}.$$

Wykorzystując prawo mnożenia znajdujemy liczbę elementów zbioru Ω:

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125,$$

ponieważ pierwszą kulę możemy wylosować na 5 sposobów, drugą też na 5 sposobów i trzecią także na 5 (wylosowane liczby mogą się powtarzać).

Zadanie 1.2. W pudełku znajduje się 5 kul o numerach 1, 2, 3, 4, 5. Losujemy *jednocześnie* 3 kule i zapisujemy ich numery. Ile jest możliwych wyników takich losowań?

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Rozwiązanie. Z treści zadania wynika, że zbiór Ω wszystkich możliwych wyników losowania składa się z 3-elementowych zbiorów utworzonych z różnych elementów zbioru $\{1,2,3,4,5\}$, tj.

$$\Omega = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{2,3,4\},\dots,\{3,4,5\}\}.$$

Są to tzw. kombinacje bez powtórzeń, do których zliczania wykorzystujemy symbol Newtona:

$$|\Omega| = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Zadanie 1.3. Ile różnych wyników można otrzymać rzucając dwiema sześciennymi kostkami do gry, jeżeli

a) kostki są rozróżnialne,

b) kostki są nierozróżnialne?

Rozwiązanie. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich możliwych wyników losowania.

a) W tym przypadku zbiór Ω składa się z dwuelementowych ciągów utworzonych z różnych lub powtarzających się elementów zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$, tj.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),\dots,(6,6)\},$$

a więc, zgodnie z regułą mnożenia,

$$|\Omega| = 6\cdot 6 = 6^2 = 36.$$

b) W tej sytuacji zbiór Ω jest złożony z dwuelementowych zbiorów utworzonych z różnych lub powtarzających się elementów zbioru $\{1,2,\dots,6\}$, tj.

$$\Omega = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,2\},\{2,3\},\dots,\{6,6\}\}.$$

Są to tzw. kombinacje z powtórzeniami, a liczba k-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego jest równa $\binom{n+k-1}{k}$, a więc w naszym przypadku mamy

$$|\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21.$$

Liczbę elementów zbioru Ω możemy też obliczyć, zauważając, że Ω zawiera sześć zbiorów, których elementy się powtarzają oraz $\binom{6}{2}$ zbiorów różnoelementowych. Wobec tego, zgodnie z regułą dodawania,

$$|\Omega| = 6 + \binom{6}{2} = 6 + 15 = 21.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Uwaga: W zadaniach, w których będziemy obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń związanych z rzucaniem kostkami będziemy zawsze zakładać, że kostki są rozróżnialne. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa zakłada, że wszystkie elementy przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω są tak samo prawdopodobne, a to nie jest prawdą z przypadku modelu z podpunktu b): łatwo się przekonać (wielokrotnie rzucając dwiema kostkami), że na przykład zdarzenia $\{1,1\}$ i $\{1,2\}$ nie są tak samo prawdopodobne; dwie jedynki wypadają średnio dwa razy rzadziej niż jedna jedynka i jedna dwójka.

Zadanie 1.4. Na parterze dziesięciopiętrowego budynku do windy wsiadło siedem osób. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę? Co jeżeli założymy, że każda osoba wysiada na innym piętrze?

Rozwiązanie. Najłatwiej zliczyć wszystkie możliwości przypisując każdej osobie piętro na którym ta osoba wysiada. Ponadto zakładamy domyślnie, że nikt nie wysiada na parterze oraz parter traktujemy jako piętro zerowe. Zatem zbiór Ω wszystkich możliwości składa się z 7-elementowych ciągów (ponieważ ludzie są rozróżnialni) utworzonych z różnych lub powtarzających się elementów zbioru 10-elementowego, a więc

$$|\Omega| = 10^7 = 10\,000\,000.$$

Jeżeli każdy wysiada na innym piętrze, to elementy tych 7-elementowych ciągów nie mogą się powtarzać i wtedy

$$|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 4 = 604\,800.$$

Zadanie 1.5. W pudełku znajduje się 9 ponumerowanych kul liczbami od 1 do 9. Losujemy jednocześnie trzy kule. Ile jest możliwych wyników losowania, w których suma wylosowanych liczb jest parzysta?

Rozwiązanie. Zauważmy, że suma trzech liczb jest parzysta, jeżeli wszystkie te liczby są parzyste albo jedna jest parzysta, a pozostałe dwie nieparzyste. Oznaczmy:

A – zbiór 3-elementowych zbiorów (utworzonych z różnych elementów zbioru $\{1, 2, \ldots 9\}$), których suma elementów jest parzysta;

A_0 – zbiór 3-elementowych zbiorów składających się z różnych elementów zbioru $\{2, 4, 6, 8\}$, czyli z samych liczb parzystych;

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

A_1 – zbiór 3-elementowych zbiorów (utworzonych z różnych elementów zbioru $\{1, 2, \ldots 9\}$), których jeden element jest parzysty, a pozostałe dwa nieparzyste.
Wtedy $A = A_0 \cup A_1$ oraz zbiory A_0 i A_1 są rozłączne. Zatem

$$|A| = |A_0| + |A_1|.$$

Aby obliczyć moc zbioru A_0, zauważamy że jest on zbiorem 3-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru 4-elementowego, a więc

$$|A_0| = \binom{4}{3} = 4.$$

Ponadto

$$|A_1| = \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} = 4 \cdot 10 = 40,$$

ponieważ tutaj losujemy jedną z czterech liczb parzystych i dwie z pięciu nieparzystych.
Wobec tego

$$|A| = 4 + 40 = 44.$$

Zadanie 1.6. a) Ile różnych tablic rejestracyjnych złożonych z siedmiu znaków (czterech cyfr i trzech liter) możemy utworzyć?
b) Ile, jeżeli na pierwszych trzech miejscach muszą być 3 litery, a na kolejnych 4 cyfry?
W obu przypadkach używamy alfabetu mającego 24 litery.

Rozwiązanie. a) Z treści zadania wynika, że tym przypadku litery i cyfry na tablicy nie muszą stać w ustalonym porządku i mogą się przeplatać. Dlatego najpierw na jeden z $\binom{7}{4}$ sposobów musimy wybrać 4 miejsca, na których będą stały cyfry. Następnie mamy 10^4 możliwości uzupełnienia tych miejsc cyframi oraz 24^3 możliwości uzupełnienia pozostałych trzech miejsc literami. Wobec tego, jeżeli oznaczymy zbiór wszystkich możliwych tablic przez Ω, to na mocy prawa mnożenia, otrzymujemy

$$|\Omega| = \binom{7}{4} \cdot 10^4 \cdot 24^3 = 4\,838\,400\,000.$$

Oczywiście moglibyśmy też zacząć od wybrania 3 miejsc dla liter, potem uzupełnić te miejsca literami, a na końcu pozostałe cztery wolne miejsca wypełnić cyframi. Dałoby to ten sam wynik:

$$|\Omega| = \binom{7}{3} \cdot 24^3 \cdot 10^4 = 4\,838\,400\,000.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

b) W tej sytuacji mamy 24^3 możliwości uzupełnienia pierwszych trzech miejsc na tablicy i 10^4 sposobów uzupełnienia pozostałych czterech miejsc. Zatem

$$|\Omega| = 24^3 \cdot 10^4 = 138\,240\,000.$$

Zadanie 1.7. Ile jest różnych 8-cyfrowych liczb zapisanych w systemie dwójkowym?

Rozwiązanie. Zauważmy, że najbardziej znaczącą cyfrą musi być jedynka (na pierwszym miejscu nie może stać zero), co pozostawia 7 miejsc, na których może stać zero albo jeden. Oznacza to, że takich liczb jest

$$2^7 = 128.$$

Zadanie 1.8. Pewien człowiek ma 12 książek, które chce ustawić ma półce. Jest to: pięć podręczników do matematyki, trzy podręczniki do chemii, dwie książki historyczne i dwa słowniki języka angielskiego. Na ile sposobów można je ustawić tak, aby książki o tej samej tematyce stały obok siebie?

Rozwiązanie. Najpierw na jeden z 4! sposobów wybieramy kolejność zakresów tematycznych, np. najpierw chemia, potem historia, dalej matematyka, a na końcu słowniki. Następnie mamy 5! możliwości poprzestawiania między sobą książek matematycznych, 3! – chemicznych, 2! – historycznych, 2! – słowników. Na mocy prawa mnożenia ostatecznie otrzymujemy

$$4! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! = 69\,120$$

wszystkich możliwych ustawień, w których książki o tej samej tematyce stoją obok siebie.

Zadanie 1.9. Ile różnych 11-literowych wyrazów (mających sens lub nie) można utworzyć z pięciu liter A, dwóch liter B, jednej litery D, jednej litery K i dwóch liter R?

Rozwiązanie. Zauważmy, że pięć miejsc na literę A możemy wybrać na $\binom{11}{5}$ sposobów. Analogicznie, z pozostałych sześciu miejsc, dwa miejsca na literę B możemy wybrać na $\binom{6}{2}$ sposobów. Dalej, literę D możemy umieścić na jednym z pozostałych czterech miejsc na $\binom{4}{1}$ sposobów, a potem literę K na $\binom{3}{1}$ sposobów. Ostatnie dwa wolne miejsca musimy uzupełnić literą R, więc wszystkich możliwych słów jest, zgodnie z regułą mnożenia,

$$\binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} = \frac{11!}{5!\,2!\,1!\,1!\,2!} = 83\,160.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Zadanie 1.10. Na ile sposobów można wybrać pięcioosobowy komitet z grupy 20 osób?

Rozwiązanie. Tworzymy 5-elementowe podzbiory utworzone z różnych elementów zbioru 20-elementowego. Mamy więc

$$\binom{20}{5} = 15\,504$$

różnych możliwych komitetów.

Zadanie 1.11. a) Na ile sposobów można wybrać pięcioosobowy komitet z grupy 12 kobiet i 8 mężczyzn, jeżeli musi się on składać z trzech kobiet i dwóch mężczyzn?
b) A na ile sposobów, jeśli dwaj mężczyźni są ze sobą pokłóceni i odmawiają bycia razem w komitecie?

Rozwiązanie. a) Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich możliwych komitetów. Trzy kobiety do komitetu możemy wybrać na $\binom{12}{3}$ sposobów, a dwóch mężczyzn na $\binom{8}{2}$ sposobów. Zatem na mocy prawa mnożenia otrzymujemy

$$|\Omega| = \binom{12}{3}\binom{8}{2} = 220 \cdot 28 = 6\,160.$$

b) Niech A będzie zbiorem komitetów, w których nie ma obojga pokłóconych mężczyzn. Obliczymy moc zbioru A.

I sposób: Zauważmy, że są dwie możliwości: albo w komitecie nie ma żadnego z pokłóconych mężczyzn (oznaczamy zbiór takich komitetów przez A_0), albo jest dokładnie jeden z nich (zbiór takich komitetów oznaczamy przez A_1).
W pierwszym przypadku dwóch mężczyzn do komitetu możemy wybrać na $\binom{6}{2}$ sposobów, a trzy kobiety znów na $\binom{12}{3}$ sposobów, co daje

$$|A_0| = \binom{6}{2}\binom{12}{3} = 15 \cdot 220 = 3\,300.$$

W drugim przypadku wybieramy do komitetu jednego z dwóch pokłóconych mężczyzn i jednego z sześciu pozostałych oraz trzy z dwunastu kobiet, a więc

$$|A_1| = \binom{2}{1}\binom{6}{1}\binom{12}{3} = 2 \cdot 6 \cdot 220 = 2\,640.$$

Skoro zbiory A_0 i A_1 są rozłączne, to z prawa dodawania wynika, że

$$|A| = |A_0| + |A_1| = 3\,300 + 2\,640 = 5\,940.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

II sposób: Zauważmy, że dopełnienie zbioru A (oznaczane przez $\overline{A}$) zawiera te komitety, w których są obydwaj pokłóceni mężczyźni. Ponieważ komitet składa się z dwóch mężczyzn i trzech kobiet, to

$$\overline{A} = \binom{2}{2}\binom{12}{3} = 220.$$

Zatem

$$|A| = |\Omega| - |\overline{A}| = 6\,160 - 220 = 5\,940.$$

Zadanie 1.12. a) Na ile sposobów można 8 rozróżnialnych kul umieścić w trzech (rozróżnialnych) pudełkach?

b) Na ile sposobów można 8 rozróżnialnych kul umieścić w trzech (rozróżnialnych) pudełkach tak, aby żadne pudełko nie było puste?

Rozwiązanie. a) Najłatwiej zliczyć wszystkie możliwości przypisując każdej kuli numer pudełka, w którym została ona umieszczona. Zatem każdemu rozmieszczeniu kul odpowiada 8-elementowy ciąg utworzony z różnych lub nie elementów 3-elementowego zbioru pudełek, np. ciąg $(3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ odpowiada sytuacji, w której dwie pierwsze kule umieszczamy w trzecim pudełku, a wszystkie pozostałe w pierwszym. Jeżeli przez Ω oznaczymy zbiór wszystkich możliwych rozmieszczeń, to na mocy prawa mnożenia:

$$|\Omega| = 3^8 = 6\,561.$$

b) Niech zbiór A składa się z tych rozmieszczeń ośmiu kul w trzech pudełkach, w których żadne pudełko nie jest puste. Inaczej mówiąc, A zawiera te 8-elementowe ciągi, które zawierają wszystkie trzy liczby: 1, 2 i 3.

Najpierw zauważmy, że elementów zbioru A nie można zliczyć w następujący sposób: najpierw wybieramy jedno z ośmiu miejsc dla jedynki, potem jedno z pozostałych siedmiu miejsc dla dwójki, następnie jedno z pozostałych sześciu miejsc dla trójki, a pozostałe pięć wolnych miejsc uzupełniamy czymkolwiek: jedynką, dwójką lub trójką. W ten sposób otrzymalibyśmy, że moc zbioru A jest równa $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3^5 = 81\,648$, co jest niemożliwe, bo jak wiemy z podpunktu a), wszystkich możliwych rozmieszczeń jest 6 561. Oczywiście powyższa metoda jest niepoprawna, ponieważ wielokrotnie zlicza te same rozmieszczenia. Spróbujmy więc inaczej:

Wprowadźmy oznaczenia:

A_1 – zbiór takich rozmieszczeń, w których pierwsze pudełko jest puste,

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

A_2 – zbiór takich rozmieszczeń, w których drugie pudełko jest puste,

A_3 – zbiór takich rozmieszczeń, w których trzecie pudełko jest puste.

Wtedy zbiór

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

zawiera te rozmieszczenia, w których pierwsze lub drugie, lub trzecie pudełko jest puste, co znaczy, że przynajmniej jedno pudełko jest puste. Jego dopełnieniem jest zbiór A złożony z tych rozmieszczeń, w których żadne pudełko nie jest puste:

$$A = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3).$$

Ponieważ zbiory A_1, A_2 i A_3 nie są parami rozłączne, to do obliczenia liczby elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ musimy wykorzystać wzór:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Jest to tzw. zasada włączeń i wyłączeń.

Ponieważ zbiór A_1 zawiera 8-elementowe ciągi utworzone z różnych lub nie elementów dwuelementowego zbioru $\{2, 3\}$, to

$$|A_1| = 2^8 = 256.$$

Podobnie, zbiór A_2 zawiera 8-elementowe ciągi utworzone z różnych lub nie elementów dwuelementowego zbioru $\{1, 3\}$, więc

$$|A_2| = 2^8 = 256.$$

Analogicznie okazuje się, że

$$|A_3| = 2^8 = 256.$$

Zbiór $A_1 \cap A_2$ zawiera te ciągi, które nie zawierają ani jedynek, ani dwójek. Wobec tego zawiera on tylko jeden element: ciąg złożony z samych trójek, czyli

$$|A_1 \cap A_2| = 1.$$

W ten sam sposób otrzymujemy, że

$$|A_2 \cap A_3| = 1 \qquad \text{oraz} \qquad |A_1 \cap A_3| = 1.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Skoro zbiór $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ zawiera te ciągi, które nie zawierają ani jedynek, ani dwójek, ani trójek, to ten zbiór musi być pusty, czyli

$$|A_2 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

Ostatecznie, ze wzoru włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 256 + 256 + 256 - 1 - 1 - 1 + 0 = 765,$$

a stąd wynika, że

$$|A| = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 6\,561 - 765 = 5\,796.$$

Zadanie 1.13. a) Na ile sposobów można 8 nierozróżnialnych kul umieścić w trzech (rozróżnialnych) pudełkach tak, aby żadne pudełko nie było puste?
b) Na ile sposobów można 8 nierozróżnialnych kul umieścić w trzech (rozróżnialnych) pudełkach?

Rozwiązanie. Oznaczmy $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ oraz $\mathbb{N}_* = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
a) Ponieważ tym razem kule są nierozróżnialne między sobą, to rozmieszczeń kul w pudełkach nie możemy utożsamiać z 8-elementowymi ciągami jak w poprzednim zadaniu. (Nie możemy myśleć, że np. „pierwszą" kulę umieszczamy w trzecim pudełku — nie ma żadnej „pierwszej" kuli.) Interesuje nas jedynie liczba kul w poszczególnych pudełkach. Inaczej mówiąc: pytamy, ile jest 3-elementowych ciągów złożonych z liczb naturalnych, których elementy w sumie dają liczbę osiem. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} A &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{N}^3 \colon p_1 + p_2 + p_3 = 8\} \\ &= \{(1,1,6), (1,2,5), (1,3,4), (1,4,3), \ldots, (6,1,1)\} \end{aligned}$$

Aby obliczyć moc zbioru A, wyobraźmy sobie osiem nierozróżnialnych obiektów ułożonych w jednym rzędzie:

$$\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$$

które rozdzielamy na trzy grupy za pomocą dwóch pionowych kresek. W ten sposób np. ciąg $(3, 1, 4) \in \Omega$ odpowiada podziałowi

$$\circ\circ\circ|\circ|\circ\circ\circ\circ,$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

a ciąg $(4, 3, 1) \in \Omega$ utożsamiamy z

$$\circ\circ\circ\circ \,|\, \circ\circ\circ \,|\, \circ\,.$$

Zatem każdemu rozmieszczeniu ośmiu nierozróżnialnych kul w trzech rozróżnialnych pudełkach odpowiada wybór dwóch różnych miejsc (z siedmiu możliwych), w których stawiamy pionowe kreski. Oznacza to, że

$$|A| = \binom{7}{2} = 21.$$

Wniosek 1. Niech $n, k \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant k$.

Liczba wszystkich takich rozmieszczeń n nierozróżnialnych kul w k rozróżnialnych pudełkach, że żadne pudełko nie jest puste, wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.

Inaczej mówiąc: istnieje $\binom{n-1}{k-1}$ różnych k-elementowych ciągów złożonych z liczb naturalnych, których elementy w sumie dają liczbę n. Jeżeli oznaczymy

$$A = \{(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{N}^k \colon p_1 + \ldots + p_k = n\},$$

to

$$|A| = \binom{n-1}{k-1}.$$

b) W tym przypadku pytamy, ile jest 3-elementowych ciągów (p_1, p_2, p_3) złożonych z nieujemnych liczb całkowitych, których elementy w sumie dają liczbę osiem. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} B &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{N}_*^3 \colon p_1 + p_2 + p_3 = 8\} \\ &= \{(0,0,8), (0,1,7), (0,2,6), (0,3,5), (0,4,4), \ldots, (8,0,0)\}. \end{aligned}$$

Aby obliczyć liczbę elementów zbioru B, dodajemy jedynki do wszystkich jego elementów (czyli np. z ciągu $(2, 0, 6)$ tworzymy ciąg $(3, 1, 7)$). W ten sposób zamiast rozmieszczeń ośmiu kul w trzech pudełkach otrzymujemy rozmieszczenia jedenastu kul w trzech pudełkach, ale takie, w których żadne pudełko nie jest puste. Wobec tego, korzystając z Wniosku 1, otrzymujemy

$$|B| = \binom{10}{2} = 45.$$

Wniosek 2. Niech $n, k \in \mathbb{N}$.

Liczba wszystkich rozmieszczeń n nierozróżnialnych kul w k rozróżnialnych pudełkach wynosi

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Inaczej mówiąc: istnieje $\binom{n+k-1}{k-1}$ różnych k-elementowych ciągów złożonych z nieujemnych liczb całkowitych, których elementy w sumie dają liczbę n. Jeżeli oznaczymy

$$B = \{(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{N}_*^k \colon p_1 + \ldots + p_k = n\},$$

to

$$|B| = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

2. Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Zadanie 2.1. W pudełku znajduje się n kul, wsród których jest 1 biała, a reszta jest czarna. Wybieramy kule z pudełka bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kulę białą wylosujemy za k-tym razem?

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia:
A_i - zdarzenie, że w i-tym losowaniu wybrano kulę czarną,
B_i - zdarzenie, że w i-tym losowaniu wybrano kulę białą,
C - zdarzenie, że kulę białą wybrano w k-tym losowaniu.
Zauważmy, że zdarzenie C możemy zapisać w postaci iloczynu:

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap B_k.$$

Wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)}, \quad \text{o ile } P(E) > 0,$$

prawdopodobieństwo zdarzenia C, pozwoli się wyrazić w następujący sposób:

$$P(C) = P(B_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}), \tag{1}$$

ale drugi czynnik w powyższym iloczynie, możemy analogcznie przedstawić jako

$$P(A_{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-2}) \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-2}).$$

Kontynuując to rozumowanie, dostajemy

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-2}) = P(A_{k-2}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-3}) \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-3})$$

... i w końcu

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

Wstawiając kolejno otrzymane wyrażenia do wzoru (1), mamy

$$\begin{aligned} P(C) \;=\; & P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot \cdots \cdot \\ & P(A_{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-2}) \cdot P(B_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Prawdopodobieństwa takich zdarzeń warunkowych są już proste do znalezienia. Istotnie, jeżeli wiemy, że za pierwszym razem wyciągnięto kulę czarną, to prawdopodobieństwo

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

wyciągnięcia takiej samej w drugim losowaniu, tj. $P(A_2|A_1)$, jest równe $\frac{n-1}{n}$. Dalej, jeżeli w pierwszych dwóch losowaniach wyciagnięto kule czarne, to prawdopodobieństwo wylosowania czarnej za trzecim razem, tj. $P(A_3|A_1 \cap A_2)$, wynosi $\frac{n-2}{n-1}$ itd... . Prawdopodobieństwo wyjęcia kuli czarnej w $(k-1)$-szym losowaniu, pod warunkiem że w poprzednich losowaniach wyciągano za każdym razem kulę czarną, tj. $P(A_{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-2})$, wynosi $\frac{n-1-(k-2)}{n-1-(k-2)+1}$. W końcu, prawdopodobieństwo wyciągnięcia za k-tym razem kuli białej, jeżeli wiemy, że wybierano same kule czarne, tj. $P(B_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})$, jest równe $\frac{1}{n-(k-1)}$. Po wstawieniu do wzoru (2) i uproszczeniu, znajdujemy, że

$$P(C) = \frac{1}{n}.$$

Zadanie 2.2. Ze standardowej talii kart wybieramy trzy karty. Jakie jest prawdopdobieństwo tego, że:

(i) wśród wylosowanych kart co najmniej dwie są tego samego koloru jeśli wiemy, że nie wa wśród nich karty niższej niż „ósemka”?

(ii) wśród wylosowanych kart co najwyżej dwie są tego samego koloru lub najwyższą kartą jest „dama”?

Rozwiązanie. Określmy wspólną w obu przypadkach przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω będącą zbiorem 3-elementowych podzbiorów zbioru 52-elementowego oraz jej liczebność $|\Omega| = \binom{52}{3}$.

Ad.(i) Wprowadzamy oznaczenia:

A - zdarzenie, że co najmniej dwie z wylosowanych trzech kart są jednakowego koloru,

B - zdarzenie, że wśród trzech wylosowanych kart, nie ma niższych od „ósemki”.

Przypomnijmy wzór na prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{o ile } P(B) \neq 0.$$

Aby znaleźć liczebność zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, zsumujemy te przypadki, w których dokładnie dwie karty są jednakowego koloru oraz te, w których wszystkie trzy karty są tego samego koloru:

$$|A| = 4 \cdot \binom{13}{2} \cdot 3 \cdot \binom{13}{1} + 4 \cdot \binom{13}{3}.$$

Potrzebujemy jednak wiedzy na temat mocy zbioru $A \cap B$. Uwzględnimy zatem w powyższym rozumowaniu, zamiast wszystkich 13 kart danego koloru (Pik, Karo, Kier

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

lub Trefl), jedynie te, które są co najmniej „ósemką”:

$$|A \cap B| = 4 \cdot \binom{7}{2} \cdot 3 \cdot \binom{7}{1} + 4 \cdot \binom{7}{3}.$$

Zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B jest:

$$|B| = \binom{28}{3}$$

ponieważ talia uszczuplona o karty niższe od „ósemki” zawiera $52 - 4 \cdot 6 = 28$ kart. Stąd

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1904}{3276}.$$

Ad.(ii) Najpierw oznaczenia:

C - zdarzenie, że co najwyżej dwie z wylosowanych trzech kart są jednakowego koloru,

D - zdarzenie, że najwyższą wylosowaną kartą jest „dama”.

Ponieważ zdarzenie C jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia, w którym wszystkie wylosowane karty są jednakowego koloru, to moc zdarzenia C wynosi:

$$|C| = |\Omega| - 4 \cdot \binom{13}{3} = 20956.$$

Aby zliczyć zdarzenia sprzyjające zdarzeniu D, rozpatrzymy trzy rozłączne przypadki:

- D_1: wylosowano dokładnie jedną „damę” i dwie karty niższe:

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{40}{2},$$

- D_2: wylosowano dokładnie dwie „damy” i jedną kartę niższą:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{40}{1},$$

- D_3: wylosowano trzy „damy”:

$$\binom{4}{3},$$

skąd

$$|D| = |D_1| + |D_2| + |D_3| = \binom{4}{1} \cdot \binom{40}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{40}{1} + \binom{4}{3} = 3364.$$

Ponieważ $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$, to pozostaje nam znaleźć liczebność zbioru zdarzeń sprzyjających zdarzeniu łącznemu $C \cap D$.

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Uwzględniając najpierw w zdarzeniu D_1, że karty mają być róznokolorowe lub dwie spośród wylosowanych trzech mogą mieć wspólny kolor, dostajemy:

$$|D_1 \cap C| = \binom{4}{1} \cdot 3\binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot 3\binom{10}{1} + \binom{4}{1} \cdot 3\binom{10}{2},$$

co odpowiada kolejno sytuacjom, w których: (a) wszystkie trzy karty są różnokolorowe, (b) 'dama' z jedną niższą od siebie kartą jest tego samego koloru oraz (c) dwie karty niższe (niebędące damami) są jednokolorowe.

Podobnie

$$|D_2 \cap C| = \binom{4}{2} \cdot 2\binom{10}{1} + \binom{4}{2} \cdot 2\binom{10}{1},$$

co odpowiada pzypadkom, w których kolejno: (a) wszystkie karty są różnego koloru oraz (b) jedna niższa karta jest koloru jednej z wylosowanych dam.

W końcu

$$|D_3 \cap C| = |D_3| = \binom{4}{3},$$

ponieważ zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu D_3 jest podzbiorem C.

Podsumowując

$$|C \cap D| = |C \cap D_1| + |C \cap D_2| + |C \cap D_3| = 2940 + 240 + 4 = 3184.$$

Zatem

$$|C \cup D| = |C| + |D| - |C \cap D| = 20956 + 3364 - 3184 = 21136,$$

a to oznacza, że

$$P(C \cup D) = \frac{21136}{22100}.$$

Zadanie 2.3. Dane są trzy pudełka, o któych wiadomo, że w pierwszym są dwie kule białe, w drugim jedna czarna i jedna biała, a w trzecim dwie kule czarne. Zakładamy, że wybór każdego kolejnego pudła jest dwa razy mniej prawdopodobny, niż wybór poprzedniego.

Do losowo wskazanego pudełka wkładamy kulę białą, po czym wyjmujemy z niego jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to kula biała?

Rozwiązanie. Wylosowanie kuli białej zależy od tego, do którego pudełka powędruje dodatkowa kula biała. Jest jasne, że może ona trafić do pudeła pierwszego (oznaczmy to zdarzenie B_1), drugiego (zdarzeenie B_2) lub trzeciego (zdarzenie B_3).

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Niech Ω oznacza przestrzeń zdarzeń elementarnych, polegających na wyborze pudła, do którego trafi dodatkowa kula biała. Zdarzenia B_1, B_2, B_3 są wtedy przykładem tzw. *rozbicia* (*podziału*) przestrzeni Ω. Istotnie, stanowią rodzinę jej podzbiorów, taką, że:

1. $P(B_1) > 0 \wedge P(B_2) > 0 \wedge P(B_3) > 0$,
2. $B_1 \cap B_2 = \emptyset \wedge B_1 \cap B_3 = \emptyset \wedge B_2 \cap B_3 = \emptyset$,
3. $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$.

Stąd, na mocy twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (zupełnym), dla dowolnego zdarzenia A,

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3).$$

Niech A oznacza zdarzenie, że na końcu wylosowano kulę białą. Wtedy:
$P(A|B_1) = 1$, ponieważ w pudle I, przy założeniu zajścia zdarzenia B_1, znajdują się same kule białe;
$P(A|B_2) = 2/3$, ponieważ przy założeniu zajścia zdarzenia B_2, skład pudła II to dwie kule białe i jedna czarna;
$P(A|B_3) = 1/3$, ponieważ przy założeniu zajścia zdarzenia B_3, skład pudła III to dwie kule czarne i jedna biała. Ponadto, z treści zadania wynika, że

$$P(B_2) = 1/2 \cdot P(B_1) \wedge P(B_3) = 1/2 \cdot P(B_2),$$

a ponieważ

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega,$$

to $P(B_1) = \frac{4}{7}$, $P(B_2) = \frac{2}{7}$ oraz $P(B_3) = \frac{1}{7}$. Ostatecznie dostajemy więc

$$P(A) = 1 \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{17}{21}.$$

Zadanie 2.4. W pudełku znajduje się 7 kul białych, 4 czarne i 3 zielone. Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry, po czym wyjmujemy z pudełka o jedną kulę więcej niż wynosi reszta z dzielenia sumy wyrzuconych oczek przez 3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul jest co najmniej jedna zielona?

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia:

A - zdarzenie, że wśród wylosowanych kul jest co najmniej jedna zielona,

B_1 - zdarzenie, że reszta z dzielenia sumy wyrzuconych oczek przez 3 wynosi 0,

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

B_2 - zdarzenie, że reszta z dzielenia sumy wyrzuconych oczek przez 3 wynosi 1,

B_3 - zdarzenie, że reszta z dzielenia sumy wyrzuconych oczek przez 3 wynosi 2.

Ponieważ zdarzenia B_1, B_2, B_3 stanowią podział (w myśl definicji przypomnianej w zadaniu poprzednim) przestrzeni Ω_B zdarzeń elementarnych polegających na dwukrotnym rzucie kostką do gry, to ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dostajemy

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3).$$

Reszty z dzielenia uzyskane po dwukrotnym rzucie kostką przedstawia poniższa tabelka:

	II rzut					
I rzut	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
3	1	2	0	1	2	0
4	2	0	1	2	0	1
5	0	1	2	0	1	2
6	1	2	0	1	2	0

Stąd,

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

W przypadku realizacji scenariusza B_1, losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo, że będzie to kula zielona wynosi

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{3}{14}.$$

Jeżeli zajdzie zdarzenie B_2, losujemy z pudła dwie kule. Prawdpodobieństwo, że co najmniej jedna będzie zielona wynosi

$$P(A|B_2) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{11}{1} + \binom{3}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{36}{91}.$$

Gdy natomiast zrealizuje się scenariusz B_3, losujemy trzy kule. Prawdpodobieństwo, że co najmniej jedna będzie zielona wynosi wtedy

$$P(A|B_3) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{11}{2} + \binom{3}{2} \cdot \binom{11}{1} + \binom{3}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{199}{364}.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Wobec tego

$$P(A) = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{3} + \frac{36}{91} \cdot \frac{1}{3} + \frac{199}{364} \cdot \frac{1}{3} = 0.3855311.$$

Zadanie 2.5. Test na obecność pewnego wirusa daje wynik pozytywny z prawdopodobieństwem 0.84 a negatywny z prawdopodobieństwem 0.16, jeśli wirus rzeczywiście jest w organizmie. Jeżeli wirusa w organizmie nie ma, prawdopodobieństwo wyniku pozytywnego jest równe 0.04. Zakłada się, że 1 procent populacji jest nosicielem wirusa. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba jest istotnie zarażona, jeżeli wiadomo, że test dał wynik negatywny.

Rozwiązanie. Postawione pytanie wydaje się mieć zaburzoną chronologię zdarzeń. Czy można pytać o prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia wcześniejszego pod warunkiem, że znamy wynik zdarzenia późniejszego? Można. Mówimy wtedy o prawdopodobieństwie 'a posteriori', tj. o prawdopodobieństwie zdarzenia określonym po wzbogaceniau wiedzy (o tym doświadczeniu) na bazie obserwacji późniejszych względem niego. Wzór Bayesa pozwala nam odwrócić kolejność warunkowania, powracając do bardziej naturalnego pytania o prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia późniejszego w zależności od tego, co stało się wcześniej.

Wprowadźmy oznaczenia:

A - zdarzenie, że losowo wybrana z populacji osoba jest nosicielem wirusa,

B_1 - zdarzenie, że przeprowadzony test dał wynik pozytywny,

B_2 - zdarzenie, że przeprowadzony test dał wynik negatywny.

Z treści zadania wiemy, że $P(B_1|A) = 0.84$, $P(B_2|A) = 0.16$ oraz $P(A) = 0.01$. Ponadto $P(B_1|A') = 0.04$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A. Prawdopodobieństwo negatywnego wyniku testu u osoby zdrowiej wynosi $P(B_2|A') = 0.96$. Ze wzoru Bayesa

$$P(A|B_2) = \frac{P(B_2|A) \cdot P(A)}{P(B_2)},$$

natomiast szansę otrzymania negatywnego wyniku testu znajdujemy używając wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(B_2) = P(B_2|A) \cdot P(A) + P(B_2|A') \cdot P(A') = 0.16 \cdot 0.01 + 0.96 \cdot 0.99.$$

Podstawiając do wzoru, otrzymujemy

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$P(A|B_2) = \frac{0.16 \cdot 0.01}{0.16 \cdot 0.01 + 0.96 \cdot 0.99} = 0.001680672.$$

Zadanie 2.6. Rzucamy symetryczną monetą. Ile rzutów należy wykonać, aby prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej 1 orła było większe niż 0.99?

Rozwiązanie. Doświadczenie losowe, którego realizacja ma charakter binarny nazywamy próbą Bernoulliego. Takie doświadczenie kończy się na jeden z dwóch możliwych sposobów, nazywanych umownie "sukcesem" lub "porażką". Ciąg przeprowadzonych niezależnie n prób Bernoulliego to tzw. schemat Bernoulliego, w którym S_n oznacza liczbę uzyskanych sukcesów.

Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów, gdzie $k \in \{0, 1, ..., n\}$, w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem p sukcesu w pojedynczej próbie, wynosi

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Zadanie polega na wskazaniu takiego n, by $P(S_n \geqslant 1) > 0.99$. Zdarzeniem przeciwnym do omawianego jest to, że nie wypadł żaden orzeł. Zatem szukamy n, dla którego

$$1 - P(S_n = 0) > 0.99 \Leftrightarrow 1 - (1/2)^n > 0.99,$$

co jest prawdą dla liczb naturalnych n większych lub równych 7.

Zadanie 2.7. Dwaj zawodnicy wykonują po 5 rzutów karnych. Zawodnik pierwszy strzela karnego z prawdopodobieństwem $0,8$ i pudłuje z prawdopodobieństwem 0.2, zawodnik drugi strzela karnego z prawdopodobieństwem 0.9 i pudłuje z prawdopodobieństwem $0,1$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zawodnik pierwszy strzeli więcej goli niż zawodnik drugi?

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia:

S_5^A - liczba skutecznych strzałów z rzutu karnego w wykonaniu pierwszego zawodnika,
S_5^B - liczba skutecznych strzałów z rzutu karnego w wykonaniu drugiego zawodnika,
p_A - prawdopodobieństwo skutecznie oddanego strzału przez pierwszego zawodnika,
p_B - prawdopodobieństwo skutecznie oddanego strzału przez drugiego zawodnika.
Szukamy prawdopodobieństwa $P(S_5^A > S_5^B)$.

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Interesujące nas zdarzenie można przedstawić w postaci sumy parami wykluczających się zdarzeń łącznych

$$\begin{aligned}\{S_5^A > S_5^B\} \;=\; & \{S_5^A = 1\} \cap \{S_5^B = 0\} \cup \\ & \{S_5^A = 2\} \cap \{S_5^B = 0\} \cup \{S_5^A = 2\} \cap \{S_5^B = 1\} \cup \\ & \{S_5^A = 3\} \cap \{S_5^B = 0\} \cup \{S_5^A = 3\} \cap \{S_5^B = 1\} \cup \{S_5^A = 3\} \cap \{S_5^B = 2\} \cup \\ & \{S_5^A = 4\} \cap \{S_5^B = 0\} \cup \{S_5^A = 4\} \cap \{S_5^B = 1\} \cup ... \cup \{S_5^A = 4\} \cap \{S_5^B = 3\} \cup \\ & \{S_5^A = 5\} \cap \{S_5^B = 0\} \cup \{S_5^A = 5\} \cap \{S_5^B = 1\} \cup ... \cup \{S_5^A = 5\} \cap \{S_5^B = 4\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Pozostaje uwzględnić fakt, że zawodnicy oddają strzały niezależnie od siebie (co pozwala przedstawić prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń jako iloczyn prawdopodobieństw każdego z nich) i zastosować wzory

$$P(S_5^A = k) = \binom{5}{k} p_A^k \cdot (1 - p_A)^{5-k}, \, dla \; p_A = 0.8 \;\; oraz \; k \in \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$P(S_5^B = j) = \binom{5}{j} p_B^j \cdot (1 - p_B)^{5-j}, \, dla \; p_B = 0.9 \;\; oraz \; j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

$$\begin{aligned} & P(S_5^A > S_5^B) = \\ & P(S_5^A = 1) \cdot P(S_5^B = 0) + \\ & P(S_5^A = 2) \cdot P(S_5^B = 0) + P(S_5^A = 2) \cdot P(S_5^B = 1) + \\ & P(S_5^A = 3) \cdot P(S_5^B = 0) + P(S_5^A = 3) \cdot P(S_5^B = 1) + P(S_5^A = 3) \cdot P(S_5^B = 2) + \\ & P(S_5^A = 4) \cdot P(S_5^B = 0) + P(S_5^A = 4) \cdot P(S_5^B = 1) + ... + P(S_5^A = 4) \cdot P(S_5^B = 3) + \\ & P(S_5^A = 5) \cdot P(S_5^B = 0) + P(S_5^A = 5) \cdot P(S_5^B = 1) + ... + P(S_5^A = 5) \cdot P(S_5^B = 4) = \\ & 0.169331. \end{aligned} \tag{4}$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

3. Badanie przebiegu zmienności funkcji

Zadania w tej części dotyczą badania przebiegu zmienności funkcji. Jeśli nie jest podana dziedzina funkcji oznacza to, że należy uwzględnić jej dziedzinę naturalną. W każdym zadaniu przedstawiony jest wykres badanej funkcji, na którym dodatkowo (w zadaniach 3.1–3.8) zaznaczono na czerwono ekstrema lokalne, a na niebiesko punkty przegięcia, czyli punkty, w których funkcja zmienia swój charakter z wypukłej na wklęsłą lub odwrotnie.

Zadanie 3.1. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Rozwiązanie. Dziedzina naturalna $D_f = \mathbb{R}$, ponieważ f jest wielomianem, a więc funkcją dobrze określoną dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Granice f w $+\infty$ i w $-\infty$ równe są

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

oraz

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

Na podstawie tych informacji wnioskujemy, że f ma co najmniej jedno miejsce zerowe oraz, z uwagi na ciągłość, mamy $f(D_f) = \mathbb{R}$. Ponadto, łatwo stąd wyciągnąć wniosek, że każdy wielomian stopnia nieparzystego posiada co najmiej jeden pierwiastek rzeczywisty. Następnie zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty,$$

więc f nie posiada asymptot ukośnych.

Uwaga. Z powyższego wynika, że dowolny wielomian stopnia co najmniej drugiego nie posiada asymptot ukośnych. Dokładniej, granice $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, gdzie

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad n \geqslant 2, \quad a_n \neq 0, \tag{5}$$

są równe $+\infty$ lub $-\infty$. Przypomnijmy, że prosta $y = ax+b$ jest asymptotą ukośną krzywej f w $+\infty$, jeśli spełniony jest warunek

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0.$$

Współczynniki a i b obliczamy wówczas ze wzorów

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax).$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Asymptotę ukośną w $-\infty$ określa się analogicznie.

Obliczamy pierwszą pochodną

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

i następnie badamy jej znak. Zauważmy, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, z czego wynika, że f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$. Natomiast w przedziale $(-1, 3)$ mamy $f'(x) < 0$ i funkcja jest tutaj malejąca. Analiza ta pokazuje, że $x_{min} = 3$, $x_{max} = -1$ oraz $f(-1) = 6 > 0$, $f(3) = -26 < 0$. Wynika stąd w szczególności, że f ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Ponieważ $f(1) \neq 0$ i $f(-1) \neq 0$, to f nie posiada pierwiastków wymiernych. Dodajmy w tym miejscu, że jeśli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych, patrz (5), to wtedy p dzieli a_0, natomiast q dzieli a_n. W naszym przypadku $a_3 = 1$, $a_0 = 1$, a więc możliwe pierwiastki wymierne to 1 i -1, które nie zerują naszej funkcji.

Do wyznaczenia miejsc zerowych f można wykorzystać metody przybliżone. W tym celu użyjemy **MATLAB**. Za pomocą poleceń **p = [1 -3 -9 1]** (współczynniki wielomianu); **r = roots(p)** (obliczenie pierwiastków) otrzymujemy: $x_1 \approx -1.93$, $x_2 \approx 0.1$ $x_3 \approx 4.82$.

Druga pochodna $f''(x) = 6(x-1)$. Stąd $f''(x) > 0$ dla $x \in (1, +\infty)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, 1)$. Zatem f jest wypukła w $(1, +\infty)$ i wklęsła w $(-\infty, 1)$. Ponadto $f''(x) = 0$ dla $x = 1$ i jest to punkt przegięcia funkcji.

Obliczamy $f(-x)$ w celu zbadania parzystości lub nieparzystości,

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 - 9(-x) + 1 = -x^3 - 3x^2 + 9x + 1,$$

więc $f(-x) \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$. Zatem f nie jest funkcją parzystą i nie jest funkcją nieparzystą. Wykres f przedstawiony jest na Rysunku 1.

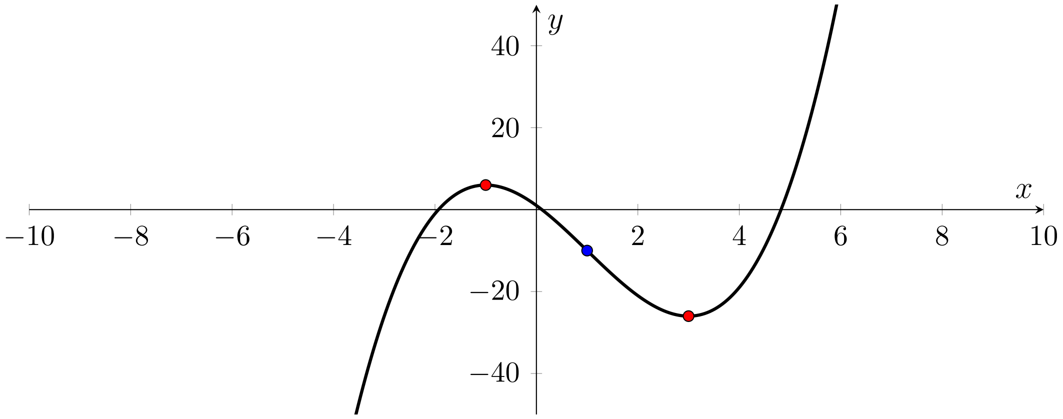
Zadanie 3.2. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = x(x+2)(x-1)^2 = x^4 - 3x^2 + 2x.$$

Rozwiązanie. Rozważana funkcja jest wielomianem więc, tak jak z zadaniu 3.1, $D_f = \mathbb{R}$. Obliczamy granice w $+\infty$ i w $-\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki



Rysunek 1. Wykres funkcji z zadania 3.1.

Na tym etapie nie można jeszcze wyznaczyć przeciwdziedziny funkcji, czyli $f(D_f)$. Potrzebne są informacje dotyczące ekstremów lokalnych. Informacje te uzyskamy z pierwszej pochodnej, która wynosi $f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$. Ponieważ $f'(1) = 0$, to funkcję tą można przedstawić w postaci

$$f'(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

gdzie $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \approx -1.36$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.36$, $x_3 = 1$. Zatem $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$. Oznacza to, że f rośnie w przedziałach (x_1, x_2), $(x_3, +\infty)$ i maleje w $(-\infty, x_1)$, (x_2, x_3). Maksimum lokalne osiągnięte jest w punkcie x_2, natomiast minima lokalne w punktach x_1, x_3. Podstawiając otrzymujemy $f(x_1) = \frac{-9-6\sqrt{3}}{4} \approx -4.84$, $f(x_2) = \frac{-9+6\sqrt{3}}{4} \approx 0.34$, $f(x_3) = 0$.

Druga pochodna $f''(x) = 6(2x^2 - 1)$, którą zapisujemy w postaci

$$f''(x) = 12(x + \tfrac{\sqrt{2}}{2})(x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}).$$

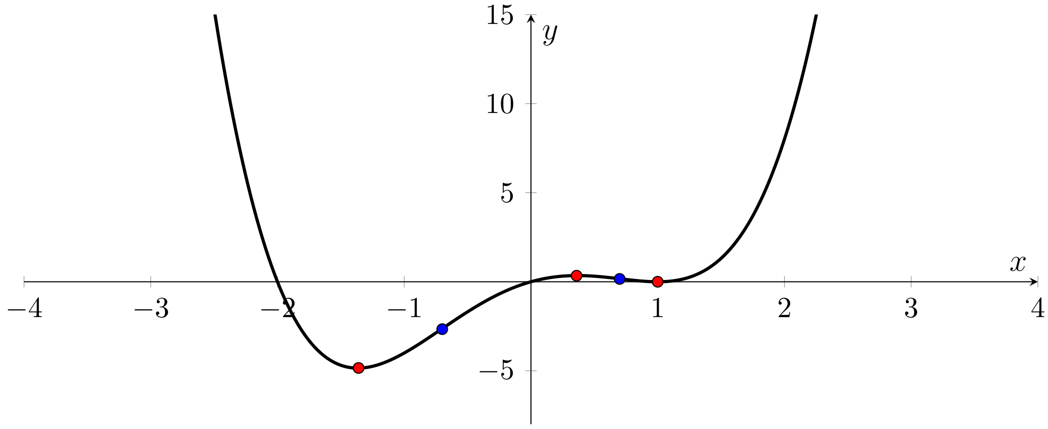
Stąd $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Funkcja jest więc wypukła w przedziałach $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ i wklęsła w $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. W rezultacie, punkty $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ są punktami przegięcia rozważanej funkcji.

Z naszej analizy wynika, że zbiór wartości f to przedział $[\frac{-9-6\sqrt{3}}{4}, +\infty)$. Podobnie jak w zadaniu 3.1, f nie jest parzysta i nie jest nieparzysta. Wykres przedstawiony jest na Rysunku 2.

Zadanie 3.3. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki



Rysunek 2. Wykres funkcji z zadania 3.2.

Rozwiązanie. Ponieważ wyróżnik trójmianu x^2+x+1 jest ujemny, $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, więc $D_f = \mathbb{R}$. Innymi słowy, mianownik nigdy nie jest zerem. Ponadto, z ujemności Δ wynika nierówność $x < x^2 + x + 1$, a zatem $f(x) < 1$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Obliczamy granice

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+1+\frac{1}{x}} = 0.$$

Zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą f w $+\infty$ i w $-\infty$, czyli obustronną. Wynika stąd także, że f nie ma asymptoty ukośnej. Dodajmy, że asymptota $y = 0$ jest szczególnym przypadkiem prostej $y = ax + b$, gdy $a = 0$, a więc szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej. Pochodną f obliczamy ze wzoru na pochodną ilorazu dwóch funkcji

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x^2+x+1) - x \cdot (x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x \in (-1, 1)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Pochodna zeruje się w dwóch punktach i zmienia w nich znak. Są to $x_{min} = -1$ i $x_{max} = 1$. Ponadto, $f(-1) = -1$, $f(1) = \frac{1}{3}$. Druga pochodną obliczamy także ze wzoru na pochodną ilorazu i po uproszczeniu otrzymujemy

$$f''(x) = \frac{2(x^3-3x-1)}{(x^2+x+1)^3}.$$

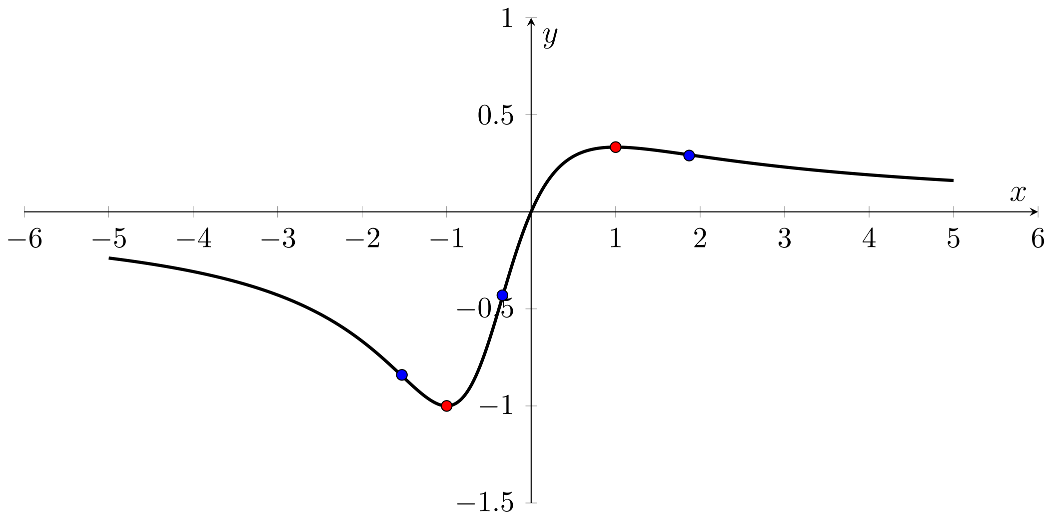
Niech $g(x) = x^3 - 3x - 1$. Miejsca zerowe g są jednocześnie miejscami zerowymi f''. Ponieważ g nie posiada pierwiastków wymiernych, patrz zadanie 3.1, więc do wyznaczenia jej miejsc zerowych wykorzystamy metody przybliżone. Zauważmy najpierw, że $g'(x) = 3(x^2-1)$ i stąd g posiada dwa ekstrema lokalne w punktach -1 i 1. Ponieważ $g(-1) =$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$1 > 0$ i $g(1) = -3 < 0$, więc g ma trzy pierwiastki rzeczywiste i można ją zapisać w postaci

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Używając ponownie programu **MATLAB** oraz poleceń **p = [1 0 -3 -1]; r = roots(p)**, otrzymujemy: $x_1 \approx -1.53$, $x_2 \approx -0.34$, $x_3 \approx 1.87$. Są to jednocześnie punkty przegięcia f. Funkcja f jest więc wypukła w przedziałach (x_1, x_2), $(x_3, +\infty)$ i wklęsła w przedziałach $(-\infty, x_1)$, (x_2, x_3). Przeciwdziedzina f to $f(D_f) = [-1, \frac{1}{3}]$. Obliczając $f(-x)$ stwierdzamy, że f nie jest parzysta i nie jest nieparzysta.



Rysunek 3. Wykres funkcji z zadania 3.3.

Zadanie 3.4. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Rozwiązanie. Dziedziną naturalną tej funkcji jest $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ponieważ dla $x = 1$ mamy wyrażenie nieoznaczone $1/0$. Granice jednostronne w tym punkcie wynoszą

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty,$$

a więc prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową f.

Badamy istnienie asymptot ukośnych. Zaczynamy od granicy

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1,$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

i następnie

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1} = 1.$$

Zatem prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną obustronną f. Pierwsza pochodna

$$f'(x) = \frac{(x^2)'\cdot(x-1) - x^2\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 2)\setminus\{1\}$. Funkcja f jest więc rosnąca w przedziałach $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ i malejąca w $(0, 1)$, $(1, 2)$. Ponadto $x_{max} = 0$ i $x_{min} = 2$ oraz $f(0) = 0$, $f(2) = 4$. Druga pochodna f dana jest wzorem

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad x \in D_f.$$

Zatem $f''(x) > 0$ dla $x > 1$ i $f''(x) < 0$, jeśli $x < 1$. Stąd f jest wypukła w przedziale $(1, +\infty)$ i wklęsła w $(-\infty, 1)$. Druga pochodną nie zeruje się żadnym punkcie, więc f nie ma punktów przegięcia. Badamy parzystość/nieparzystość

$$f(-x) = \frac{x^2}{-x-1} = -\frac{x^2}{x+1},$$

zatem rozważana funkcja nie jest parzysta i nie jest nieparzysta. Zbiór wartości to $(-\infty, 0]\cup[4, +\infty)$. Wykres przedstawiony jest na Rysunku 4.

Uwaga. W tym zadaniu przeciwdziedzinę można wyznaczyć bezpośrednio. Mianowicie, zgodnie z definicją $y \in f(D_f)$, jeśli istnieje $x \in D_f$, dla którego $y = f(x)$. Rozwiązując równanie $y = \frac{x^2}{x-1}$ względem x otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2 - xy + y = 0$. Równanie to ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geqslant 0$, gdzie

$$\Delta = y^2 - 4y = y(y-4).$$

Zatem jeśli $y \in (-\infty, 0]\cup[4, +\infty)$, to $y = f(x)$, dla pewnego $x \in D_f$.

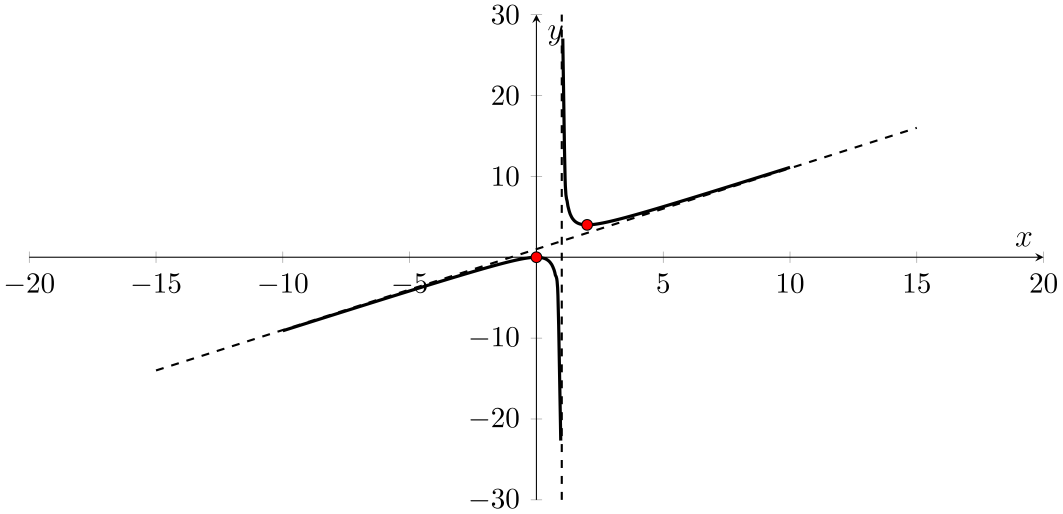
Zadanie 3.5. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

Rozwiązanie. Wyrażenie pod pierwiastkiem, czyli $1-x^2$, powinno być nieujemne, zatem $x^2 \leqslant 1$ i stąd $D_f = [-1, 1]$. Z uwagi na ograniczoność dziedziny, funkcja ta nie posiada asymptot ukośnych. Nie posiada także asymptot pionowych.

Korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu dwóch funkcji, $(gh)' = g'h + gh'$, dostajemy

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki



Rysunek 4. Wykres funkcji z zadania 3.4.

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ i w tym przedziale funkcja jest rosnąca. Natomiast $f'(x) < 0$ w przedziałach $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, gdzie f jest malejąca. Ponadto $x_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i wartości w tych punktach wynoszą odpwoiednio $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$. Obliczając drugą pochodną otrzymamy

$$f''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Z równania $2x^2 - 3 = 0$ wynika, że $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ i zauważmy, że wartości te nie należą do dziedziny funkcji. Łatwo widać, że $2x^2 - 3 < 0$ dla $x \in D_f$, zatem $f''(x) > 0$ w przedziale $(-1, 0)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$. Punkt $x = 0$ jest więc punktem przegięcia f, tzn. f zmienia swój charakter z wypukłej na wklęsłą, patrz Rysunek 5.

Badamy parzystość lub nieparzystość. Obliczamy $f(-x)$

$$f(-x) = -x\sqrt{1-(-x)^2} = -x\sqrt{1-x^2} = -f(x),$$

a więc f jest nieparzysta. Zbiór wartości f to przedział $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

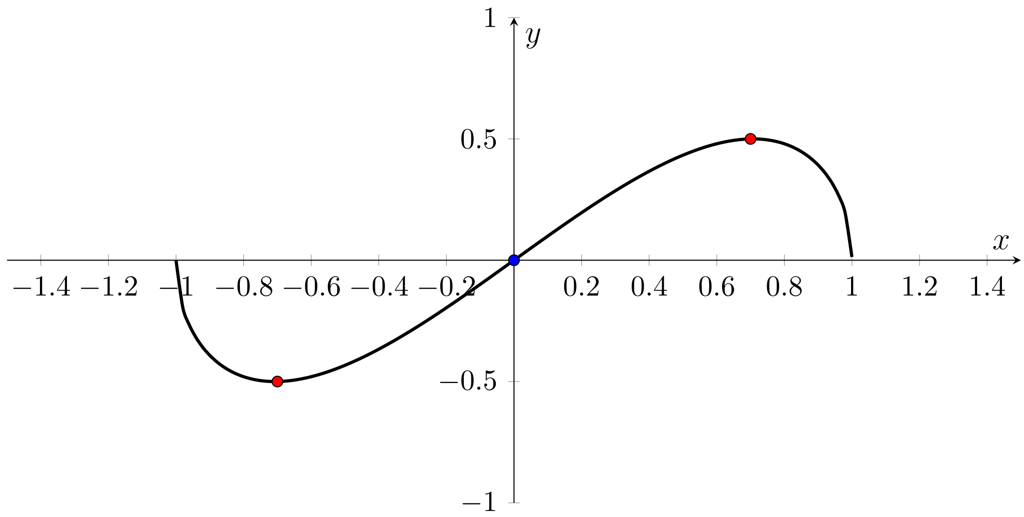
Zadanie 3.6. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^2e^{-x}$ na zbiorze $D_f = [0, +\infty)$.

Rozwiązanie. Zaczynamy od obliczenia pierwszej pochodnej

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Ponieważ $e^{-x} > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $f'(x) > 0$ dla $x \in (0, 2)$ i funkcja jest w tym przedziale rosnąca. Podobnie $f'(x) < 0$ dla $x \in (2, +\infty)$ i f jest malejąca. Zatem $x_{max} = 2$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki



Rysunek 5. Wykres funkcji z zadania 3.5.

i $f(2) = 4e^{-4}$. Obliczamy drugą pochodną

$$f''(x) = (2 - 2x) \cdot e^{-x} + (2x - x^2) \cdot (-e^{-x}) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Miejsca zerowe drugiej pochodnej to $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. Zatem $f''(x) > 0$ w przedziałach $(0, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (x_1, x_2)$. Punkty te są więc punktami przegięcia f. W x_1 funkcja zmiena się z wypukłej na wklęsłą, a w x_2 z wklęsłej na wypukłą.

Obliczamy granicę f w $+\infty$. Ponieważ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $+\infty \cdot 0$, więc przekształcamy je do postaci $\frac{+\infty}{+\infty}$ i stosujemy dwukrotnie regułę de l'Hospitala

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0. \tag{6}$$

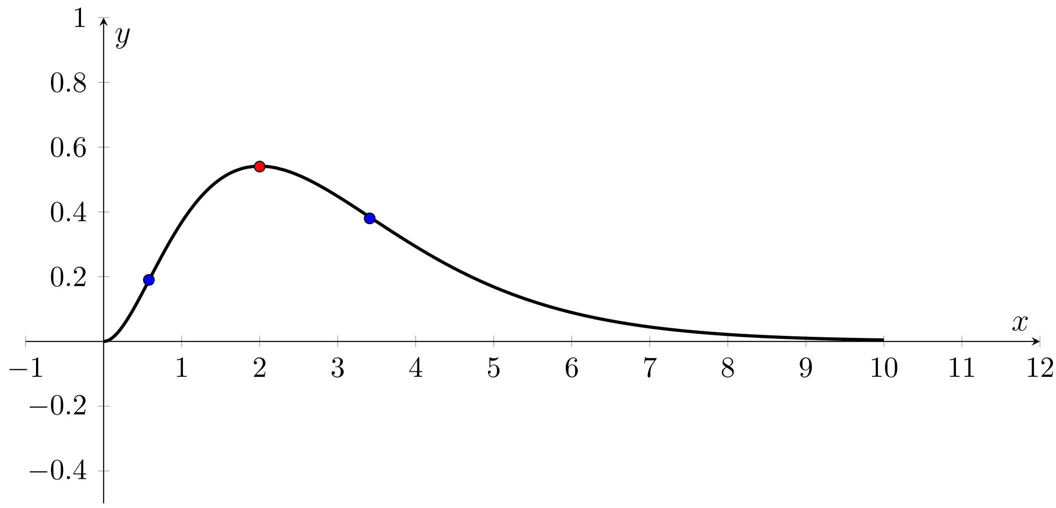
Prosta $y = 0$ jest zatem asymptotą poziomą tej funkcji. Ponieważ dziedzina f nie jest symetryczna względem $x = 0$, to funkcja ta nie jest parzysta i nie jest nieparzysta. Zauważmy ponadto, że gdybyśmy rozważyli f także dla $x < 0$, to f również nie byłaby parzysta lub nieparzysta. Wynika to z faktu, że $f(-x) = x^2 e^x$ i wyrażenie to nie jest równe $x^2 e^{-x}$ ani $-x^2 e^{-x}$. Wykres f przedstawiony jest na Rysunku 6.

Uwaga. Na podstawie (6) wnioskujemy, że jeśli $w(x)$ jest dowolnym wielomianem, patrz (5), to

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{w(x)}{e^x} = 0.$$

Wynika to z kilkukrotnego zastosowania reguły de l'Hospitala do wyrażenia nieoznaczonego $\frac{+\infty}{+\infty}$ oraz faktu, że wielomian posiada tylko skończoną ilość niezerowych pochodnych.

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki



Rysunek 6. Wykres funkcji z zadania 3.6.

Zadanie 3.7. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^x$ na zbiorze $D_f = (0, 2]$.

Rozwiązanie. Przekształcamy f do wygodniejszej postaci wykładniczej, zgodnie ze wzorem $a^b = c^{b \log_c a}$. Zatem

$$f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej $(e^{g(x)})' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ otrzymujemy

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \tfrac{1}{x}) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1).$$

Stąd $f'(x) > 0$ wtedy, gdy $\ln x > -1$, czyli dla $x \in (e^{-1}, 2)$. W tym przedziale funkcja jest rosnąca. Podobnie $f'(x) < 0$ dla $x \in (0, e^{-1})$ i f jest tutaj malejąca. Zatem $x = e^{-1} \approx 0.36$ jest minimum lokalnym i $f(e^{-1}) \approx 0.69$.

Druga pochodna dana jest wzorem

$$f''(x) = e^{x \ln x} \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right], \quad x > 0.$$

Zatem $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in D_f$ i f jest wypukła na swojej dziedzinie.

W celu obliczenia granicy prawostronnej f w punkcie $x = 0$, wyznaczymy najpierw granicę prawostronną wyrażenia $x \ln x$. Jest to wyrażenie nieoznaczone $0 \cdot \infty$, które przekształcamy do postaci $\frac{\infty}{\infty}$ i stosujemy do niego regułę de l'Hospitala

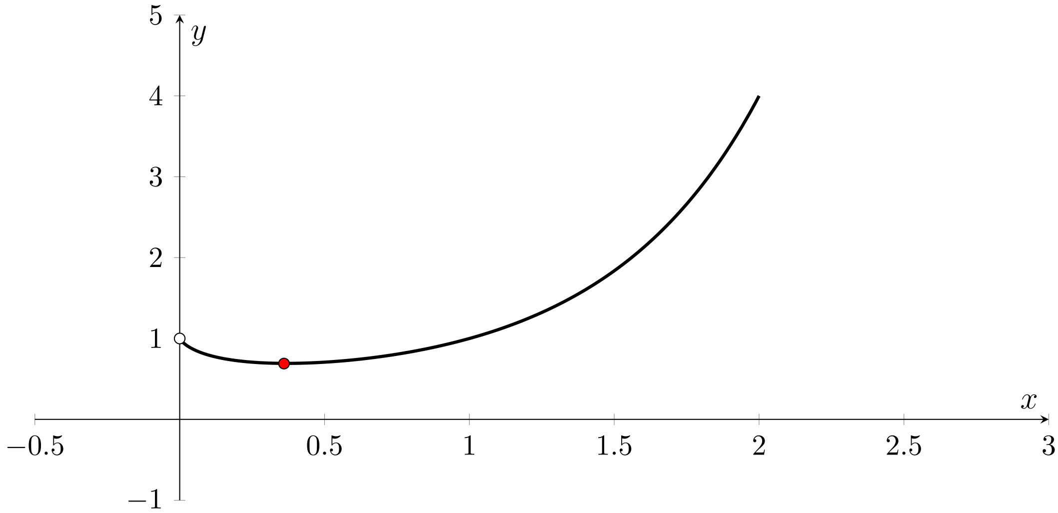
$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0. \tag{7}$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Następnie, z uwagi na ciągłość funkcji wykładniczej, mamy

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1. \tag{8}$$

Wynika stąd, że f można przedłużyć naturalnie do funkcji ciągłej na przedziale $[0, 2]$ przyjmując $f(0) = 1$, patrz Rysunek 7. Dziedzina f, podobnie jak w zadaniu 3.6, nie jest symetryczna względem $x = 0$, zatem funkcja nie jest parzysta i nie jest nieparzysta. Jednak w przeciwieństwie do funkcji z poprzedniego zadania, funkcja x^x nie jest dobrze określona dla wszystkich $x < 0$. Na przykład, dla $x = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy wyrażenie nieokreślone $1/\sqrt{-2}$.



Rysunek 7. Wykres funkcji z zadania 3.7.

Przypomnijmy w tym miejscu, że f nazywamy funkcją ciągłą w przedziale (a, b), jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, dla każdego $x_0 \in (a, b)$. W tym przypadku dla dowolnego zbieżnego ciągu liczbowego (a_n), gdzie $a_n \in (a, b)$, zachodzi równość

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to+\infty} a_n). \tag{9}$$

Zatem (8) jest szczególnym przypadkiem (9), gdzie $f(x) = e^x$, która jest ciągła na rozważanym przedziale. Intuicyjnie warunek (9) wyraża fakt, że w przypadku funkcji ciągłej z granicą można wejść do argumentu.

Zadanie 3.8. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x), \quad x \in (0, 1).$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Rozwiązanie. Wyobraźmy sobie monetę, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi x, natomiast reszki $1-x$. Wówczas $f(x)$ jest entropią tego dwupunktowego rozkładu prawdopodobieństwa. Wykorzystując wzór $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ zapisujemy f w łatwiejszej do różniczkowania, równoważnej postaci

$$f(x) = -\frac{1}{\ln 2}\left[x\ln x + (1-x)\ln(1-x)\right].$$

Zauważmy, że z (7) wynika $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to 1-} f(x) = 0$. Zatem f można przedłużyć naturalnie w sposób ciągły do przedziału $[0,1]$, patrz Rysunek 8.

Pierwsza pochodna dana jest wzorem

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln 2}\left[\ln x + 1 - \ln(1-x) - 1\right] = -\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Wynika stąd, że $f'(x) = 0$, jeśli $\frac{x}{1-x} = 1$, czyli $x = \frac{1}{2}$. Ponieważ $\ln 2 \approx 0.69$, więc $f'(x) > 0$ dla $x \in (0, \frac{1}{2})$ i wynika to z następujących równoważności

$$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{1-x} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad x < \frac{1}{2}.$$

Zatem $f'(x) < 0$ w przedziale $(\frac{1}{2}, 1)$ oraz $x_{max} = \frac{1}{2}$. Ponadto, $f(\frac{1}{2}) = 1$ i jest to największa wartość f w tym przedziale. Największą entropię ma więc moneta uczciwa. Zwróćmy uwagę na granicę pochodnej

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 0+}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = +\infty.$$

Oznacza to, że styczna do wykresu f zbliża się, gdy x dąży do zera, do prostej pionowej $x = 0$. Podobnie obliczamy $\lim_{x\to 1-} f'(x) = -\infty$ i oznacza to, że styczna zbliża się do prostej $x = 1$. Druga pochodna f ma postać

$$f''(x) = -\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = -\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x(1-x)}$$

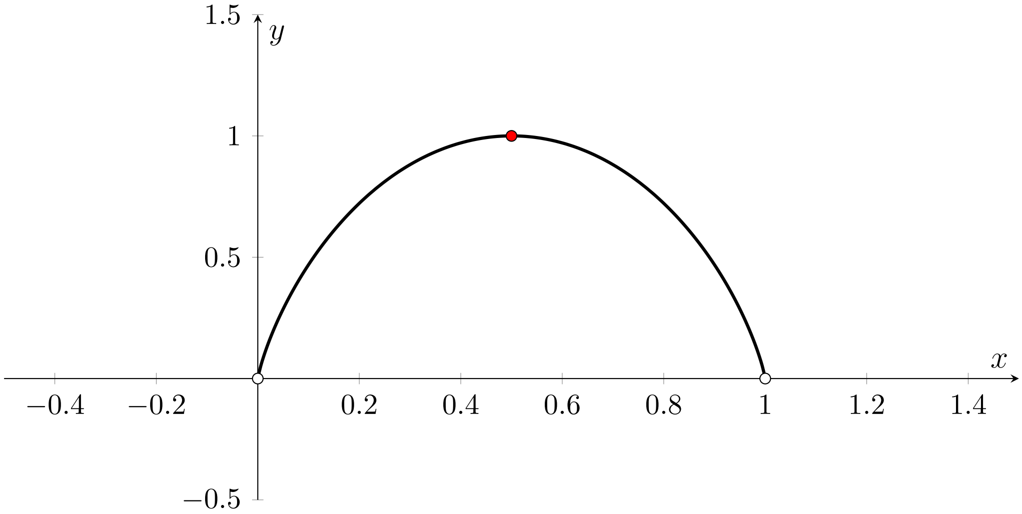
i widać, że $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (0,1)$. Funkcja jest zatem wklęsła. Widać ponadto, że wykres f jest symetryczny względem prostej $x = \frac{1}{2}$, czyli $f(x) = f(1-x)$.

Zadanie 3.9. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = 2e^{-\frac{x}{12}}\cos x$ na zbiorze $D_f = [0, 8\pi]$.

Rozwiązanie. Przede wszystkim zauważmy, że f jest dobrze określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz, z uwagi na nierówność $|\cos x| \leqslant 1$, mamy

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| \leqslant 2\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{12}} = 0.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki



Rysunek 8. Wykres funkcji z zadania 3.8.

Zatem f jako całość „maleje” do zera w $+\infty$. Przedziały monotoniczności wyznaczymy z pierwszej pochodnej, która dana jest wzorem

$$f'(x) = -2(\tfrac{1}{12}\cos x + \sin x)e^{-\frac{x}{12}}.$$

Miejsca zerowe f' znajdujemy rozwiązując równanie $\sin x = -\frac{1}{12}\cos x$ lub równoważnie $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{12}$. Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać $x_k = x_0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $x_0 = \arctan(-\frac{1}{12}) \approx -0.08$. Ponieważ $8\pi \approx 25.13$, to w przedziale $[0, 8\pi]$ mamy 8 rozwiązań: $x_1 \approx 3.05$, $x_2 \approx 6.2$, $x_3 \approx 9.34$, $x_4 \approx 12.48$, $x_5 \approx 15.62$, $x_6 \approx 18.76$, $x_7 \approx 21.9$, $x_8 \approx 25.05$. Następnie zauważmy, że $f'(x) > 0$, jeśli $\sin x < -\frac{1}{12}\cos x$. Ostatnią nierówność rozwiązujemy rozpatrując dwa przypadki. W pierwszym $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{12}$ z warunkiem $\cos x > 0$, a w drugim $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{12}$ z warunkiem $\cos x < 0$. Stąd ogólnie $x \in (x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi)$. Zatem f jest rosnąca w przedziałach: (x_1, x_2), (x_3, x_4) , (x_5, x_6), (x_7, x_8). W rezultacie f jest malejąca w $(0, x_1)$, (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_6, x_7). Stąd maksima lokalne f znajdują się w punktach $x_{2k} = x_0 + 2k\pi$, a minima lokalne w punktach $x_{2k+1} = x_0 + (2k+1)\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Obliczając drugą pochodną otrzymamy

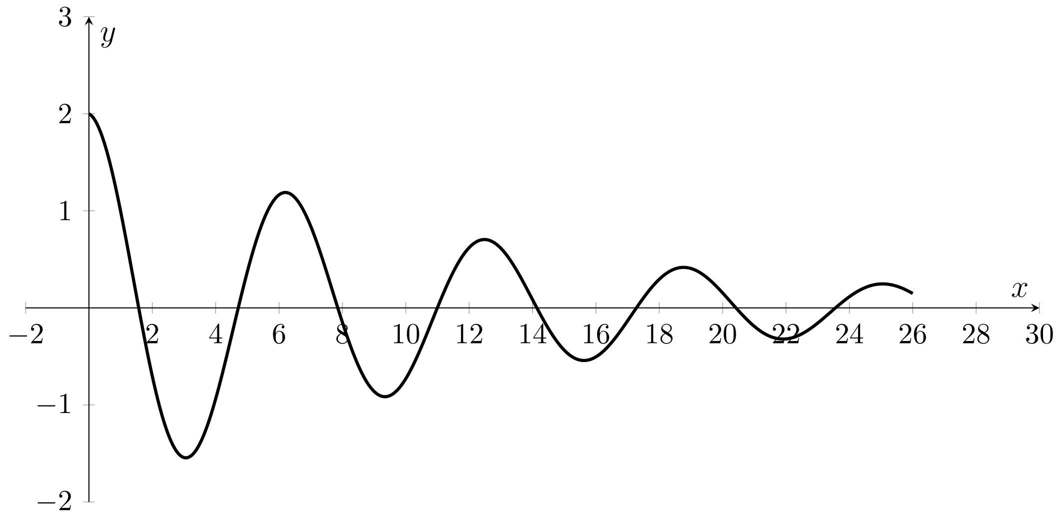
$$f''(x) = -2(\tfrac{143}{144}\cos x - \tfrac{1}{6}\sin x)e^{-\frac{x}{12}}.$$

Miejsca zerowe f'' znajdujemy rozwiązując równanie $\sin x = \frac{143}{24}\cos x$ lub równoważnie $\operatorname{tg} x = \frac{143}{24}$. Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać $x'_k = x'_0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gdzie

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$x_0' = \arctan(\frac{143}{24}) \approx 1.4$. W przedziale $[0, 8\pi]$ mamy więc 8 rozwiązań: $x_0' \approx 3.05$, $x_1' \approx 4.54$, $x_2' \approx 7.68$, $x_3' \approx 10.82$, $x_4' \approx 13.97$, $x_5' \approx 17.11$, $x_6' \approx 20.25$, $x_7' \approx 23.39$.

Następnie, $f''(x) > 0$, jeśli $\frac{143}{144}\cos x < \frac{1}{6}\sin x$. Tak jak wcześniej rozpatrujemy dwa przypadki: $\operatorname{tg} x > \frac{143}{24}$ z warunkiem $\cos x > 0$, a w drugim $\operatorname{tg} x < \frac{143}{24}$ z warunkiem $\cos x < 0$. Stąd ogólnie $x \in (x_0' + 2k\pi, x_1' + 2k\pi)$ i funkcja jest w tych przedziałach wypukła. Uwzględniając dziedzinę są to przedziały: (x_0', x_1'), (x_2', x_3'), (x_4', x_5'), (x_6', x_7'). Przedziały, w których f jest wklęsła są następujące: $(0, x_0')$, (x_1', x_2'), (x_3', x_4'), (x_5', x_6'), $(x_7', 8\pi)$. Wykres f przedstawiony jest na Rysunku 9.



Rysunek 9. Wykres funkcji z zadania 3.9.

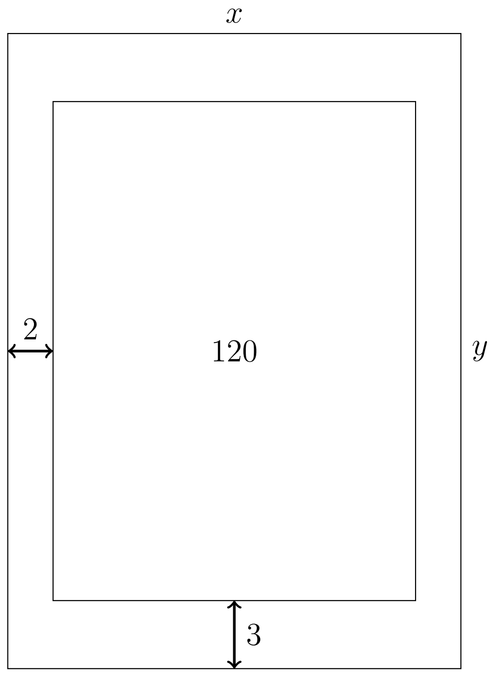
Uwaga. Zauważmy, że chociaż $\cos x$ jest funkcją okresową o okresie 2π, to f funkcją okresową nie jest. Wynika to stąd, że funkcja wykładnicza $e^{-\frac{x}{12}}$ jest malejąca. Natomiast maksima lokalne f znajdują się w punktach $x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ i to one są "okresowe". Innymi słowy, f posiada maksima lokalne w punktach "okresowych" o okresie 2π. Jak zauważyliśmy wcześniej, wartości funkcji w tych punktach maleją do zera. Podobnie jest z minimami lokalnymi, punktami przegięcia, przedziałami monotonicznosci, wklęsłości i wypukłości.

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

4. Zastosowania rachunku różniczkowego

Zadanie 4.1. Na jednej stronie książki tekst powinien zajmować 120 cm^2. Jednocześnie prawy i lewy powinny mieć po 2 cm, a górny i dolny po 3 cm. Jakie powinny być wymiary strony, aby zużyć najmniej papieru do jej druku?

Rozwiązanie. Załóżmy, że strona ma wymiary x cm na y cm.



Na marginesy musimy przeznaczyć

$$2 \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot (y - 2 \cdot 3) = 6x + 4y - 24.$$

Oznacza to, że

$$xy = 120 + 6x + 4y - 24 = 96 + 6x + 4y,$$

skąd

$$y(x - 4) = 96 + 6x$$

lub równoważnie

$$y = \frac{96 + 6x}{x - 4}.$$

Zwróćmy uwagę, że x nie może być równe 4, ponieważ wtedy całą stronę zajmowałyby marginesy.

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Pole jednej strony P jest zatem dane wzorem

$$P(x) = x\frac{96+6x}{x-4}, \qquad x > 4.$$

Musimy znaleźć najmniejszą wartość funkcji P. Mamy

$$P'(x) = 6 - \frac{480}{(x-4)^2},$$

więc

$$P'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{480}{(x-4)^2} = 6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-4)^2 = 80.$$

Rozwiązując ostatnie równanie, oraz biorąc pod uwagę, że $x > 4$, dostajemy

$$P'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_0 = 4(1+\sqrt{5}).$$

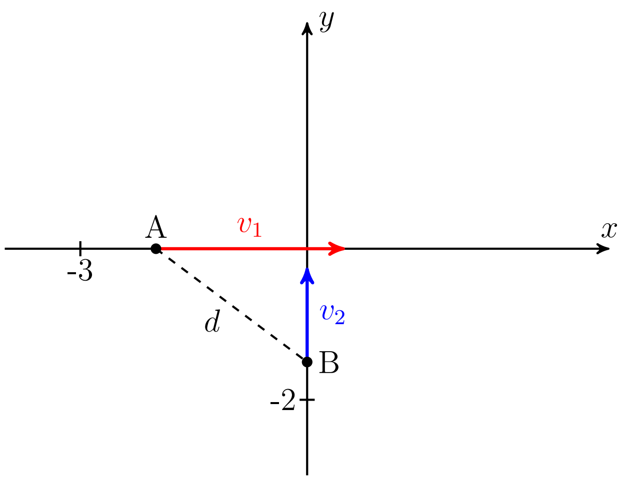
Ponieważ $P'(x) < 0$ dla $x < x_0$ oraz $P'(x) > 0$ dla $x > x_0$, to funkcja P osiąga w punkcie x_0 minimum globalne. Ponadto, dla $x = x_0$, otrzymujemy

$$y = y_0 = 6(1+\sqrt{5}).$$

Zadanie 4.2. Wzdłuż osi układu współrzędnych poruszają się dwa punkty. W chwili początkowej mają odpowiednio współrzędne $(-3,0)$ oraz $(0,-2)$. Pierwszy z nich porusza się ze stałą prędkością v_1 w kierunku dodatniej półosi Ox, drugi natomiast ze stałą prędkością v_2 w kierunku dodatniej półosi Oy. W jakiej chwili punkty te znajdą się najbliżej siebie?

Rozwiązanie. Dla ustalonego czasu $t \geqslant 0$ oznaczmy pierwszą współrzędną punktu poruszającego się po osi Ox przez $A(t)$, a drugą współrzędną punktu poruszającego się po osi Oy przez $B(t)$. Ponieważ poruszają się one ruchem jednostajnym, to

$$A(t) = -3 + v_1 t, \qquad B(t) = -2 + v_2 t.$$



DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Odległość między tymi punktami w chwili t jest równa, zobacz rysunek,

$$d = d(t) = \sqrt{A(t)^2 + B(t)^2}.$$

Musimy teraz znaleźć minimum globalne funkcji d w zależności od t. Mamy

$$d'(t) = \frac{2A(t)A'(t) + 2B(t)B'(t)}{2\sqrt{A(t)^2 + B(t)^2}} = \frac{v_1(-3 + v_1 t) + v_2(-2 + v_2 t)}{\sqrt{A(t)^2 + B(t)^2}}.$$

Licznik ostatniego ułamka jest równy

$$t(v_1^2 + v_2^2) - 3v_1 - 2v_2.$$

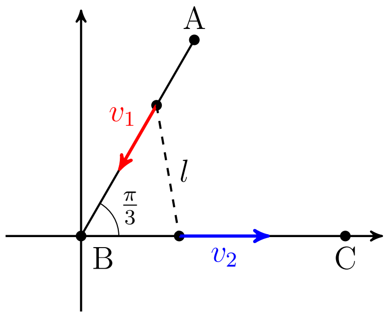
W konsekwencji

$$d'(t) = 0 \qquad \iff \qquad t = t_0 = \frac{3v_1 + 2v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Ponieważ $d'(t) < 0$ dla $t < t_0$ oraz $d'(t) > 0$ dla $t > t_0$, to w punkcie t_0 funkcja d ma minimum globalne.

Zadanie 4.3. Dane są trzy niewspółliniowe punkty A, B i C, dla których $\angle ABC = \pi/3$. Z punktu A do punktu B wyrusza samochód poruszający się ze stałą prędkością v_1, a z punktu B do punktu C pociąg jadący ze stałą prędkością v_2. Zakładając, że odległość między A i B jest równa d, oblicz w jakiej chwili odległość między samochodem i pociągiem będzie najmniejsza. Możesz założyć, że punkt C leży na tyle daleko od B, że samochód dotrze do punktu B zanim pociąg dotrze do C.

Rozwiązanie. Możemy przyjąć, że punkty A, B i C umieszczono na płaszczyźnie, tak jak na rysunku:



Jeżeli dla ustalonej chwili $t \geqslant 0$ przez $A(t)$ oznaczymy położenie samochodu, a przez $B(t)$ położenie pociągu, to

$$l = l(t) = |A(t) - B(t)|.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Ponieważ punkt A ma współrzędne $d(1/2, \sqrt{3}/2)$, to $A(t)$ ma współrzędne

$$\Big((d - tv_1)(1/2, \sqrt{3}/2)\Big).$$

W związku z tym

$$l(t) = \sqrt{\left(\frac{d - tv_1}{2} - tv_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}(d - tv_1)}{2}\right)^2}.$$

Ponieważ $x \mapsto \sqrt{x}$ jest funkcją rosnącą, to wystarczy znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia pod pierwiastkiem. Oznaczmy je przez $L(t)$. Wtedy

$$\begin{aligned} L'(t) &= (tv_1 + 2tv_2 - d)\left(\frac{v_1}{2} + v_2\right) + \frac{3}{2}(tv_1^2 - dv_1) = \\ &= 2t(v_1^2 + v_2^2 + v_1v_2) - d(2v_1 + v_2). \end{aligned}$$

Stąd

$$L'(t) = 0 \qquad \iff \qquad t = t_0 = d\frac{2v_1 + v_2}{2v_1^2 + 2v_2^2 + 2v_1v_2}.$$

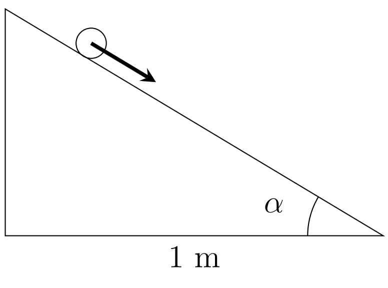
Ponieważ $L'(t) < 0$ dla $t < t_0$ oraz $L'(t) > 0$ dla $t > t_0$, to funkcja L osiąga w punkcie t_0 minimum globalne.

Sposób 2. Interesującą nas długość l możemy również wyznaczyć, wykorzystując wzór kosinusów. Odległość punktu $A(t)$ od punktu B jest równa $d - tv_1$, a odległość punktu $B(t)$ od B wynosi tv_2. Wynika stąd, że

$$(l(t))^2 = (d - tv_1)^2 + (tv_2)^2 - 2(d - tv_1)(tv_2)\cos\frac{\pi}{3},$$

co oczywiście prowadzi do tego samego wyniku co wcześniej.

Zadanie 4.4. Pod wpływem siły ciążenia po równi pochyłej o długości podstawy 1 m toczy się swobodnie (bez tarcia) kula.



Przy jakim kącie nachylenia α czas staczania się kuli ze szczytu będzie najkrótszy?

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Rozwiązanie. Kula stacza się po równi ruchem jednostajnie przyspieszonym. Jej przyspieszenie a dane jest wzorem

$$a = g \sin \alpha,$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Jednocześnie droga s, którą przebywa kula z przyspieszeniem a w czasie t jest równa

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

W naszym przypadku

$$s = \frac{1}{\cos \alpha},$$

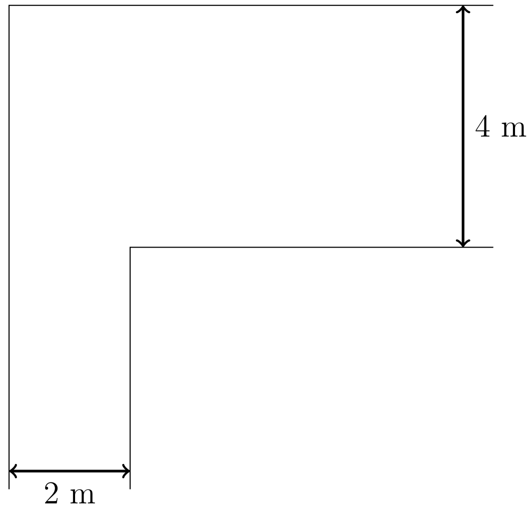
więc czas potrzebny na stoczenie się kuli to

$$t = t(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{g \sin \alpha \cos \alpha}}.$$

Wystarczy teraz znaleźć minimum funkcji t na przedziale $(0, \pi/2)$.

Ponieważ funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ jest rosnąca, to wystarczy znaleźć wartość α, dla której funkcja $f\colon (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$ przyjmuje wartość największą. Ponieważ $f'(\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, to $f'(\alpha) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \pi/4$. Ponadto $f'(\alpha) < 0$ dla $\alpha \in (0, \pi/4)$ oraz $f'(\alpha) > 0$ dla $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$, więc w punkcie $\alpha = \pi/4$ funkcja f osiąga maksimum globalne, a zatem funkcja t osiąga wartość najmniejszą.

Zadanie 4.5. Korytarz w budynku ma wymiary jak na poniższym rysunku.

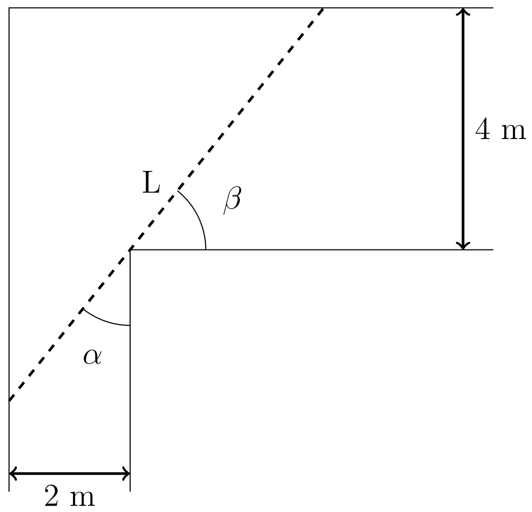


Jaką największą długość może mieć deska, którą chcemy przenieść poziomo przez ten korytarz?

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Rozwiązanie. Przy ustalonym $\alpha \in (0, \pi/2)$ długość odcinka L wynosi

$$L = L(\alpha) = \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{4}{\sin\beta}.$$



Ponieważ $\beta = \pi/2 - \alpha$, to

$$L(\alpha) = \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{4}{\cos\alpha}.$$

Musimy znaleźć najmniejszą wartość funkcji L na przedziale $(0, \pi/2)$. Mamy

$$L'(\alpha) = -\frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

więc $L'(\alpha) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos^3\alpha = 2\sin^3\alpha$, czyli

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad \text{lub równoważnie} \qquad \alpha = \alpha_0 = \text{arc tg}\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ponieważ funkcja L dąży do $+\infty$, gdy α dąży do 0 lub $\pi/2$, to w punkcie α_0 osiąga ona minimum globalne. Oznacza to, że deska może mieć długość

$$L(\alpha_0) = \sqrt{2}(2 + \sqrt[3]{2})^{3/2} \approx 8.3.$$

Zadanie 4.6. Pewna firma zajmuje się wypożyczaniem limuzyn. Wynagrodzenie dla szofera jest równe 100 zł na godzinę. Jednocześnie firma ponosi koszty związane z obsługą samochodu: koszty stałe równe 60 zł na godzinę, oraz koszt paliwa zależny od średniej prędkości. Przy prędkości v samochód zużywa $0.01v^2$ litrów paliwa na godzinę. Przy jakiej średniej prędkości koszt przejechania 1 km będzie najmniejszy, przy założeniu, że cena jednego litra paliwa wynosi 6 zł?

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Rozwiązanie. Przy prędkości v czas przejechania 1 km wynosi $1/v$. W związku z tym, koszt f na takiej trasie jest równy

$$f(v) = (100 + 60 + 6 \cdot 0.01 \cdot v^2)\frac{1}{v} = \frac{160}{v} + 0.06v.$$

Wystarczy teraz znaleźć najmniejszą wartość funkcji f dla $v > 0$. Mamy

$$f'(v) = -\frac{160}{v^2} + 0.06,$$

więc

$$f'(v) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{160}{v^2} = 0.06 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v = v_0 = \sqrt{\frac{8000}{3}}.$$

Ponieważ $f'(v) < 0$ dla $v < v_0$ oraz $f'(v) > 0$ dla $v > v_0$, funkcja f przyjmuje w punkcie v_0 wartość najmniejszą.

Zadanie 4.7. *Przychód* firmy świadczącej usługi serwerowe uzależniony jest od ilość przechowywanych przez klientów danych. Jeżeli przez x oznaczymy ilość danych w eksabajtach (eksabajt $= 10^6$ TB) zapisanych przez klientów na serwerach firmy, to jej przychód R wyraża się wzorem

$$R(x) = 30x - 2x^2.$$

Jednocześnie firma ta ponosi *koszt* C związany z utrzymaniem serwerów, który wynosi

$$C(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Oznacza to, że dla ustalonego x firma osiąga *zysk* równy $\Pi(x) = R(x) - C(x)$. Rząd zamierza wprowadzić specjalny podatek T od tego rodzaju usług, uzależniony od ilości przechowywanych danych x, równy

$$T(r) = rx$$

dla pewnego parametru $r > 0$. Oczywiście firma zamierza uwzględnić (dodać) ten podatek do swojego kosztu i ustalić ilość przechowywanych danych x w ten sposób, aby osiągnąć maksymalny zysk Π.

Jaka powinna być wartość parametru r, aby przychód państwa z tytułu podatku T był w tej sytuacji największy?

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Rozwiązanie. Dla ustalonego parametru r zysk firmy po uwzględnieniu podatku wynosi

$$\Pi(x) = R(x) - (C(x) + rx) = -3x^2 + (28 - r)x - 1.$$

Musimy znaleźć największą wartość funkcji Π na przedziale $\langle 0, +\infty)$. Mamy

$$\Pi'(x) = -6x + 28 - r,$$

więc

$$\Pi'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_0 := \frac{28 - r}{6}.$$

Jednocześnie $\Pi'(x) > 0$ dla $x < x_0$ oraz $\Pi'(x) < 0$ dla $x > x_0$. Oznacza to, że funkcja Π osiąga w punkcie x_0 maksimum globalne. Innymi słowy, dla ustalonego $r \in (0, 28\rangle$ i $x = x_0 \geqslant 0$ firma osiąga największy zysk; jeżeli $r > 28$, to $x_0 < 0$ i firma osiąga maksymalny zysk (a w zasadzie minimalną stratę równą -1) dla $x = 0$.

Skoro firma maksymalizuje swój zysk przy $x = x_0$, to przychód z tytułu podatku wyniesie

$$T(r) = rx_0 = r\frac{28 - r}{6} = \frac{28r - r^2}{6}.$$

Ponieważ

$$T'(r) = \frac{28 - 2r}{6} = \frac{14 - r}{3},$$

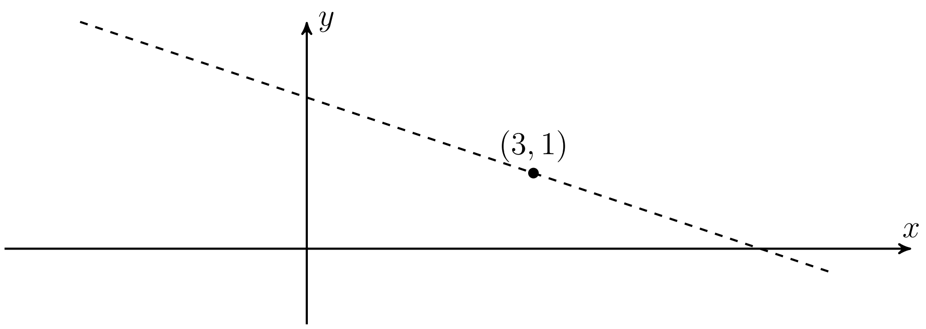
to $T'(14) = 0$ oraz $T'(r) > 0$ dla $r < 14$ i $T'(r) < 0$ dla $r > 14$. Wynika stąd, że funkcja uzyskany podatek będzie największy dla $r = 14$.

Zadanie 4.8. Przez punkt o współrzędnych $(3, 1)$ poprowadź taką prostą, aby pole trójkąta utworzonego przez tę prostą oraz dodatnie półosie układu współrzędnych było jak najmniejsze.

Rozwiązanie. Prosta o równaniu $y = ax + b$ przechodzi przez punkt $(3, 1)$, o ile

$$1 = 3a + b,$$

czyli $b = 1 - 3a$.



DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Jednocześnie współczynnik kierunkowy prostej musi być ujemny, gdyż w przeciwnym razie nie zostanie utworzony trójkąt z treści zadania. Rozważana prosta przecina osie układu współrzędnych w punktach $(0,b) = (0, 1-3a)$ oraz $(-b/a, 0) = (-1/a+3, 0)$. Wynika stąd, że pole trójkąta jest równe

$$P(a) = \frac{1}{2}(1-3a)(-1/a+3) = -\frac{(1-3a)^2}{2a}.$$

Wystarczy teraz znaleźć najmniejszą wartość funkcji P dla $a < 0$. Mamy

$$P'(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - 9\right),$$

więc

$$P'(a) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = a_0 = -\frac{1}{3}.$$

Jednocześnie $P'(a) < 0$ dla $a < a_0$ oraz $P'(a) > 0$ dla $a > a_0$, wiec w punkcie a_0 funkcja P osiąga wartość najmniejszą. Poszukiwaną prostą jest więc prosta o równaniu

$$y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

5. Algebra liniowa

5.1 Działania na macierzach

Zadanie 5.1. Mając dane liczby $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -2$ oraz macierze kwadratowe

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

wykonać następujące działania:

a) $A + B$, **b)** $B - C$, **c)** $A + \alpha B - \beta C$, **d)** $C - \alpha A^T + \beta B$.

Rozwiązanie. a) Zauważmy, że macierze A i B są tego samego wymiaru. Zatem możemy wykonać dodawanie tych macierzy w następujący sposób

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + (-8) & (-4) + 2 \\ 2 + 0 & 0 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Zauważmy, że macierze B i C są tego samego wymiaru. Zatem możemy wykonać odejmowanie tych macierzy w następujący sposób

$$B - C = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 - 0 & 2 - 3 \\ 0 - (-1) & 4 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

c) W tym przypadku macierze A, B i C są wymiaru 2×2. Mamy, więc

$$A + \alpha B - \beta C = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (-8) & \frac{1}{2} \cdot 2 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 & 12 \cdot 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-2) \cdot 0 & (-2) \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-1) & (-2) \cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + (-4) - 0 & -4 + 1 - (-6) \\ 2 + 0 - 2 & 0 + 2 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) Macierze A, B i C są tego samego wymiaru. Przypomnijmy, że macierz transponowana do macierzy A, powstaje z macierzy A przez zamianę wierszy na kolumny.

$$C - \alpha A^T + \beta B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T + (-2)\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0-3+16 & 3-1+(-4) \\ -1-(-2)+0 & 0-0+(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.2. Wykonać działania

a) $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T,$$

b) $$2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -7 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Rozwiązanie. a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2-6 & 3-(-3) \\ -1-12 & 0-0 \\ 4-0 & 5-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -13 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

b)

$$2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -7 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & -4 \\ 6 & 2 & -14 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 15 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 6 & -1 \\ 9 & 1 & -12 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Zadanie 5.3. Wyznaczyć macierze $C = A \cdot B$ oraz $D = B \cdot A$, gdzie

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. a) Wiemy, że mnożenie macierzy jest wykonalne, jeśli liczba kolumn macierzy $A = [a_{ij}]$ o wymiarze $n \times m$ jest równa liczbie wierszy macierzy $B = [b_{ij}]$ o wymiarze $m \times l$.

Wtedy elementy macierzy $C = A \cdot B = [c_{ij}]$ o wymiarze $n \times l$, obliczamy zgodnie ze wzorem

$$c_{ij} \stackrel{def}{=} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj},$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

W naszym przykładzie powyższy warunek jest spełniony, możemy zatem wyznaczyć macierz $C = A \cdot B$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 7 \cdot (-4) & 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 + 7 \cdot 6 \\ (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot (-4) & (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 40 \\ 22 & -28 \end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć macierz $D = B \cdot A$ sprawdzamy czy liczba kolumn macierzy B równa jest liczbie wierszy macierzy A. Zarówno liczba kolumn macierzy B jak i liczba wierszy macierzy A jest równa 2. Możemy zatem wykonać mnożenie macierzy $B \cdot A$

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (-2) \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & (-2) \cdot (-3) + 4 \cdot 3 & (-2) \cdot 7 + 4 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 7 + 2 \cdot (-5) \\ (-4) \cdot 1 + 6 \cdot (-1) & (-4) \cdot (-3) + 6 \cdot 3 & (-4) \cdot 7 + 6 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 18 & -34 \\ -2 & 6 & -10 \\ -10 & 30 & -58 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że $A \cdot B \neq B \cdot A$. Oznacza to, że mnożenie macierzy nie jest na ogół przemienne.

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

b) Liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wynosi 3, wobec tego możemy wyznaczyć macierz $C = A \cdot B$. Mamy

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+5+0 \\ 3-20-3 \\ -6+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Macierzy $D = B \cdot A$ nie można wyznaczyć, gdyż liczba kolumn macierzy B jest równa 1, a liczba wierszy macierzy A wynosi 3.

Zadanie 5.4. Wykonać działania

a) $$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T - 3 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^T \right)^T,$$

b) $$5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)^T,$$

c) $$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \left(-\tfrac{1}{3}\right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \right)^T.$$

Rozwiązanie. a) Skorzystamy z tego, że dla dowolnej macierzy A zachodzi $(A^T)^T = A$. Mamy, więc $$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T - 3 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^T \right)^T =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} =$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$\begin{bmatrix} (-2)\cdot(-2)+0\cdot 0+2\cdot 3 & (-2)\cdot 1+0\cdot(-1)+2\cdot 0 \\ (-4)\cdot(-2)+(-2)\cdot 0+(-6)\cdot 3 & (-4)\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+(-6)\cdot 0 \\ 0\cdot(-2)+2\cdot 0+(-8)\cdot 3 & 0\cdot 1+2\cdot(-1)+(-8)\cdot 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -10 & -2 \\ -24 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-3 & -2-0 \\ -10+9 & -2-6 \\ -24-12 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & -8 \\ -36 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$5\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)^T$$

Zauważmy, że nie można wykonać mnożenia macierzy występujących w nawiasie, gdyż liczba kolumn pierwszej macierzy jest różna od ilości wierszy drugiej macierzy.

c)

$$(-2)\cdot\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - (-\tfrac{1}{3}) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \right)^T =$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0+0+3+0+12 & 3+0-6+0+24 \\ 0-6+0+0-3 & 6+0+0+3-6 \end{bmatrix} =$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 15 & 21 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5.2 Wyznacznik macierzy

Zadanie 5.5. Korzystając z definicji obliczyć wyznaczniki macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Na początku przypomnijmy definicję wyznacznika.

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy rzeczywistej (zespolonej) $A = [a_{ij}]$ przypisuje liczbę rzeczywistą (zespoloną) oznaczaną symbolem $\det A$ lub $|A|$.

Funkcja ta określona jest wzorem indukcyjnym:

1. jeżeli macierz A ma stopień $n = 1$, to $\det A = a_{11}$;
2. jeżeli macierz A ma stopień $n \geqslant 2$, to

$$\det A = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \ldots + a_{1n}D_{1n},$$

gdzie $D_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A, zaś A_{ij} oznacza macierz stopnia $(n-1)$ otrzymaną przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy A.

a) Korzystając z tej definicji wyznacznik macierzy A równy jest

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot |-2| + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot |-3| = 2 - (-6) = -2 + 6 = 4.$$

b) Zgodnie z definicją wyznacznik macierzy B wynosi

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$2 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 3) - (4 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) - 2 \cdot (4 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) = -6 - 3 - 8 = -17.$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Zadanie 5.6. Obliczyć wyznaczniki macierzy stosując regułę Sarrusa

$$\text{a)}\quad A=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&4&-1\\2&1&-1\end{bmatrix},\qquad \text{b)}\quad B=\begin{bmatrix}-1&1&2\\3&4&1\\5&-1&1\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Aby obliczyć wyznacznik wykorzystując regułę Sarrusa należy dopisać po prawej stronie wyznacznika dwie pierwsze kolumny (lub na dole wyznacznika dwa pierwsze wiersze) i zsumować iloczyny liczb stojących na przekątnych w kierunku z lewej do prawej strony ze znakiem " + ", a z prawej do lewej strony ze znakiem " − ".

a) Obliczamy wyznacznik macierzy A

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ - & - & - & & \end{array} =$$

$$2\cdot 4\cdot(-1)+0\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 1\cdot 1-1\cdot 4\cdot 2-2\cdot(-1)\cdot 1-0\cdot 1\cdot(-1)=-8+1-8+2=-13.$$

b) Obliczamy wyznacznik macierzy B

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 5 & -1 \\ - & - & - & & \end{array} =$$

$$(-1)\cdot 4\cdot 1+1\cdot 1\cdot 5+2\cdot 3\cdot(-1)-2\cdot 4\cdot 5-(-1)\cdot 1\cdot(-1)-1\cdot 3\cdot 1=-4+5-6-40-1-3=-49.$$

Reguły Sarrusa nie stosuje się do obliczania wyznaczników wyższych rzędów.

Zadanie 5.7. Obliczyć wyznaczniki macierzy korzystając z własności wyznaczników i z rozwinięcia Laplace'a.

$$\text{a)}\begin{bmatrix}1&3&0\\2&-1&1\\-3&1&-1\end{bmatrix},\ \text{b)}\begin{bmatrix}3&1&-1&0\\0&-2&1&3\\1&0&2&1\\-1&1&0&-2\end{bmatrix},\ \text{c)}\begin{bmatrix}1&0&1&-1&2\\0&1&2&1&1\\-2&1&0&1&-1\\3&2&1&-2&0\\0&-2&-4&-2&-2\end{bmatrix}.$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

Rozwiązanie. W rozwiązaniu skorzystamy z następującej własności.

Jeśli do elementów dowolnego wiersza (dowolnej kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (innej kolumny) tego wyznacznika, pomnożone przez dowolną liczbę, to wyznacznik nie zmieni się.

Własność tę wykorzystamy do uzyskania jak największej liczby zer w wybranym wierszu lub wybranej kolumnie. Ułatwi nam to obliczanie wyznacznika. Będziemy stosować następujące operacje elementarne.

$w_i + cw_j$ - oznacza dodanie do elementów i-tego wiersza odpowiadających im elementów j-tego wiersza pomnożonych przez liczbę c,

$k_i + ck_j$ - oznacza dodanie do elementów i-tej kolumny odpowiadających im elementów j-tej kolumny pomnożonych przez liczbę c.

W obliczeniach wykorzystamy rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza lub j-tej kolumny:

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + \ldots + a_{in}D_{in}, \qquad \det A = a_{1j}D_{1j} + \cdots + a_{nj}D_{nj}.$$

a) Do obliczenia wyznacznika zastosujemy operację elementarną $w_3 + w_2$, a następnie rozwinięcie Laplace'a względem trzeciej kolumny.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{w_3+w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(0+3) = -3.$$

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{k_4+2k_2}{=} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_1+w_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_3-2w_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

c) Zauważmy, że po zastosowaniu operacji elementarnej $w_5 + 2w_2$ otrzymamy wyznacznik, którego ostatni wiersz składa się z samych zer. A wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej wiersz złożony z samych zer lub kolumnę złożoną z samych zer równy jest zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{w_5+2w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5.3 Układy równań liniowych

Zadanie 5.8. Rozwiązać układ równań korzystając z twierdzenia Cramera

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$.

Rozwiązanie. a)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5.$$

Zauważmy, że wyznacznik macierzy A jest różny od zera, oznacza to, że układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami Cramera

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

gdzie $\det A_i,\ i = 1, 2$ oznacza wyznacznik otrzymany z wyznacznika $\det A$ przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych. Aby znaleźć rozwiązanie układu równań obliczamy wyznaczniki macierzy A_1 i A_2

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = 2 + 8 = 10,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{10}{5} = 2, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{0}{5} = 0.$$

b)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej A

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_2 + 2w_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1.$$

Stąd wnioskujemy, że układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie (układ oznaczony). Następnie obliczamy wyznaczniki macierzy A_1, A_2 i A_3

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_2 + 2w_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_2 + 2w_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{[}{w_3} + w_2]w_1 + w_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 14 =$$
$-2.$

Zatem z twierdzenia Cramera otrzymujemy

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{1}{1} = 1, \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-2}{1} = -2.$$

c)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_2 + w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

oraz pozostałe wyznaczniki macierzy A_1, A_2 i A_3

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_3 - 2w_2}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 10 = 22,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_2 + w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 2 = 22,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{w_2 + w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 10 = -11.$$

Zauważmy, że wyznacznik macierzy A jest równy 0 i wyznacznik macierzy A_2 jest różny od 0. Zatem podany układ jest sprzeczny.

d)

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} \overset{[}{w}_3 - w_1]w_2 - 2w_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} \overset{w_3+w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Następnie obliczamy wyznaczniki macierzy A_1, A_2 i A_3

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 10 & -6 \end{vmatrix} \overset{w_3-3w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{w_3+w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} \overset{w_3-3w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{w_3+w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & 3 \end{vmatrix} \overset{w_3-3w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{w_3+w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ponieważ wszystkie wyznaczniki są równe 0, więc rozważany układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 2.

Określić liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru p

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + px_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ px_1 - px_2 + x_3 = -1 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} 2x_1 + px_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - px_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:

a)

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$\begin{cases} x_1 + px_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ px_1 - px_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{vmatrix} \overset{w_3 + w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1+p & 0 & 2 \end{vmatrix} = p \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1+p & 2 \end{vmatrix} =$$

$(-p) \cdot (6 - 2(1+p)) = (-p)(4 - 2p) = p(2p - 4).$

Zatem układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $p \neq 0$ i $p \neq 2$.

Dla $p = 0$ układ równań przyjmuje postać

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$$

Obliczamy wyznaczniki macierzy A_1, A_2 i A_3

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_3 + w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6 - 2) = -4,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem dla $p = 0$ układ równań nie ma rozwiązań, ponieważ wyznacznik macierzy $\det A = 0$ i $\det A_2 \neq 0$.

Dla $p = 2$ układ równań przyjmuje postać

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}.$$

Obliczamy wyznaczniki macierzy A_1, A_2 i A_3

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{w_2+w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_3+w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{w_3-w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \overset{w_2+w_1}{=} (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem dla $p = 2$ układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, ponieważ wszystkie wyznaczniki są równe zero.

b)

$$\begin{cases} 2x_1 + px_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - px_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej A

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & p & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -p & -1 \end{vmatrix} \overset{w_3+w_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & p & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = p\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (-p)(-12) = 12p.$$

Rozważany układ ma jedno rozwiązanie dla $p \neq 0$.

Dla $p = 0$ układ równań przyjmuje postać

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

Obliczamy pozostałe wyznaczniki

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{w_1 - 2w_3}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-6-3) = 9,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem układ równań nie ma rozwiązań, ponieważ wyznacznik macierzy A jest równy zero i $\det A_2 \neq 0$.

DOFINANSOWANO ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA
DOTACJA CELOWA MINISTRA EDUKACJI I NAUKI
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA
im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego"
Ministerstwo Edukacji i Nauki
Minister Edukacji i Nauki