Zestaw 6 — Teoria liczb

Część A

1. Wykorzystując algorytm Euklidesa, znajdź $\mathrm{NWD}(m, n)$ dla

a) $m = 2000$, $n = 987$,
b) $m = 3000$, $n = 999$,
c) $m = 8359$, $n = 9373$,
d) $m = 21212121$, $n = 12121212$.

2. Wykorzystując rozszerzony algorytm Euklidesa, znajdź $\mathrm{NWD}(m, n)$ oraz takie liczby całkowite s i t, że

$$\mathrm{NWD}(m, n) = s \cdot m + t \cdot n,$$

przy czym

a) $m = 35$, $n = 96$,
b) $m = 320$, $n = 30$,
c) $m = 14259$, $n = 3521$.

Część B

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite a i b, dla których

a) $8a + 3b = 1$,
b) $7a - 11b = 1$,
c) $8a + 3b = 4$,
d) $9a + 6b = 5$,
e) $9a + 3b = 39$,
f) $5a - 3b = 4$.

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby

$$1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + 4^{100} + 5^{100}$$

przez 5.

5. Sprawdź, że liczba

a) $5^{36} - 1$ jest podzielna przez 13,
b) $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielna przez 10,
c) $7^{222} + 1$ jest podzielna przez 5,
d) $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 13 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

6. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby

a) 2^{999},
b) $76^{57} - 57^{76}$.

7. Wyznacz ostatnią cyfrę liczby $7^{7^{7^{7}}}$.

8. Wykaż, że liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 3.

9. Znajdź regułę podzielności przez 11 i 7.

10. Rozwiąż kongruencję

a) $5x \equiv 1 \pmod{14}$,
b) $8x \equiv 4 \pmod{13}$,
c) $17x \equiv 3 \pmod{26}$,
d) $3x \equiv 59 \pmod{100}$,
e) $99x \equiv 2 \pmod{13}$,
f) $16x \equiv 6 \pmod{24}$,
g) $12x \equiv 8 \pmod{16}$,
h) $2023x \equiv 11 \pmod{643}$.

11. Rozwiąż układ kongruencji

a) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{5}, \\ x \equiv 6 \pmod{11}, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{13}, \\ x \equiv 65 \pmod{99}, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{17}, \\ x \equiv 91 \pmod{97}, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4}, \\ x \equiv 4 \pmod{5}, \\ x \equiv 1 \pmod{7}, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 3 \pmod{9}, \\ x \equiv 5 \pmod{13}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3}, \\ 2x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 3x \equiv 2 \pmod{7}, \\ x \equiv 1 \pmod{8}. \end{cases}$

Część C

12. Wyznacz piątą od końca (od prawej strony w zapisie dziesiętnym) cyfrę liczby

$$5^{5^{5^{5^5}}}.$$

13. Rozważmy ciąg liczb naturalnych

$$a_1 = 7, \quad a_2 = 7^7, \quad a_3 = 7^{7^7}, \quad \dots \quad a_n = \underbrace{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^7}}}}}_{n \text{ siódemek}}, \quad \dots$$

Równoważnie, ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ możemy zdefiniować rekurencyjnie

$$a_1 = 7, \qquad a_{n+1} = 7^{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Niech teraz

$$b_n = a_n \bmod 100, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wyznacz wszystkie liczby, które wystąpią w ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nieskończenie wiele razy.

14. Wyznacz wszystkie rozwiązania całkowite x i y równania

$$2^x + 17 = y^4.$$

15. Udowodnij, że równanie

$$a^{11} + b^{11} + c^{11} = 111$$

nie ma rozwiązań całkowitych a, b i c.