Zestaw 4 — Indukcja

Część A

1. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości:

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

c) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

a) $n^3 + 11n$ jest podzielna przez 6,

b) $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9,

c) $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3.

Część B

3. Udowodnij, że

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad n \geqslant 2.$$

4. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których prawdziwa jest nierówność

$$2^n > n^2.$$

5. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których prawdziwa jest nierówność

$$3^n \geqslant 2(n+1)^2.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b oraz dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

7. Znajdź zwartą postać sumy

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

8. Znajdź zwartą postać sumy

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

9. Udowodnij nierówność podwójną

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leqslant n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

10. Zdefiniujmy ciąg $(a_n)_{n \geqslant 0}$ wzorami $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$,

$$a_{n+2} = 3a_n + 2a_{n-1}, \qquad n \geqslant 1.$$

Znajdź wzór rekurencyjny na a_n, $n \in \mathbb{N}$, w którym nie występuje żaden wyraz ciągu poza a_{n-1}.

11. Niech $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Fibonacciego zdefiniowanym rekurencyjnie

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Sprawdź, że

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad n \geqslant 0.$$

12. Udowodnij, że

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

13. Sprawdź, że

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

14. Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba F_{5n} jest podzielna przez 5.

15. Ciąg $(a_n)_{n\geqslant 0}$ jest zdefiniowany rekurencyjnie przez równości

$$a_1 = 1, \qquad a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}), \quad m \geqslant n \geqslant 0.$$

Znajdź wzór jawny na a_n dla $n \geqslant 0$.

16. Wykaż, że liczba przekątnych w n-kącie wypukłym jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$.

17. Niech liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie $n \geqslant 2$ oraz $a_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots n$, tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

18. W pewnym państwie każda para miast jest połączona drogą jednokierunkową. Uzasadnij, że istnieje w tym państwie takie miasto, do którego można dojechać z każdego innego miasta bezpośrednio lub przejeżdżając przez co najwyżej jedno inne miasto.

19. Z szachownicy o wymiarach $2^n \times 2^n$ usunięto jedno pole (wymiaru 1×1). Wykaż, że pozostałą część można pokryć figurami w kształcie litery L, które złożone są z trzech pól 1×1.

20. W turnieju piłkarskim bierze udział n drużyn. Turniej był rozgrywany metodą „każdy z każdym", a każdy mecz zakończył się wygraną jednej z drużyn. Uzasadnij, że po zakończeniu turnieju wszystkie drużyny można ustawić w kolejności w ten sposób, że pierwsza drużyna wygrała z drugą, druga wygrała z trzecią, trzecia wygrała z czwartą, ..., przedostatnia wygrała z ostatnią.

21. Grupa 33 dzieci ustawiła się na zaśnieżonym boisku szkolnym. Każde dziecko stoi w innym miejscu, a odległości między dziećmi są parami różne. W pewnym momencie każde dziecko rzuca kulką śniegu w dziecko stojące najbliżej. Wykaż, że przynajmniej jedno z dzieci nie zostanie trafione.

22. Na szachownicy o wymiarach 2023×2023 ustawiono pionek w lewym dolnym rogu. Ponadto ułożono na niej pewną liczbę płytek o wymiarach 1×1 lub 2×1. Żadne dwie płytki nie nachodzą na siebie, nie mają wspólnego boku ani wspólnego wierzchołka, a pole w prawym górnym rogu nie jest zakryte. Uzasadnij, że można dotrzeć do tego pola, wykonując pionkiem ruchy w górę lub w prawo oraz omijając pola, na których leżą płytki.

Część C

23. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz dowolnej liczby naturalnej $n \leqslant p-2$ suma

$$1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$$

jest podzielna przez p.

24. Wykaż, że każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić jako sumę liczb Fibonacciego (jednej bądź wielu), przy czym w sumie tej nie mogą wystąpić dwie kolejne liczby Fibonacciego. Innymi słowy, dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki zbiór liczb naturalnych $\{c_1, \ldots, c_k\}$, że $c_i + 1 < c_{i+1}$ dla $i = 1, \ldots, k-1$ oraz

$$n = \sum_{i=1}^{k} F_{c_i}.$$

25. Udowodnij, że istnieje taki ciąg liczb naturalnych, że każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić jako różnicę pewnych dwóch elementów tego ciągu.