Zestaw 2 — Kwantyfikatory

Część A

1. Odczytaj sens następujących zdań (przez $\mathbb{P}$ oznaczamy zbiór liczb pierwszych):

a) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{a,b,c,d\in\mathbb{Z}} n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ — *twierdzenie Lagrange'a,*

b) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{p,q\in\mathbb{N}} p, q \in \mathbb{P} \wedge 2n = p + q$ — *hipoteza Goldbacha,*

c) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{p\in\mathbb{N}} p > n \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p + 2 \in \mathbb{P}$ — *hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych,*

d) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{a,b,c\in\mathbb{N}} n \geqslant 3 \Rightarrow a^n + b^n \neq c^n$ — *wielkie twierdzenie Fermata.*

2. Określ wartość logiczną zdań:

a) $\bigwedge_x \bigvee_y 2x - y = 0$,

b) $\bigwedge_x \bigvee_y x - 2y = 0$,

c) $\bigwedge_x x < 10 \Rightarrow \left(\bigwedge_y y < x \Rightarrow y < 9\right)$,

d) $\bigwedge_x \bigvee_y (y > x \wedge \bigvee_z y + z = 100)$,

gdy zakresem zmienności wszystkich zmiennych są $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$.

3. Określ wartość logiczną zdań (zakresem zmienności wszystkich zmiennych jest $\mathbb{R}$):

a) $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2 + y^2 > 0$,

b) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y^2 = 0$,

c) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y = 0$,

d) $\bigvee_x \bigwedge_y x^2 + y = 0$,

e) $\bigvee_a \bigwedge_x (a - 3)x^2 + (a + 1)x + 1 < 0$,

f) $\bigvee_a \bigvee_x x^2 - 2x + \log_{\frac{1}{2}} a = 0$,

g) $\bigvee_a \bigwedge_x a^2x^2 + ax - 4 > 0$,

h) $\bigvee_a \bigwedge_x x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}\right)^a > 0$.

4. Czy funkcja zdaniowa

$$\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x)$$

jest tautologią?

Część B

5. Wyznaczyć wykresy funkcji zdaniowych (zakresem zmienności wszystkich zmiennych jest zbiór liczb rzeczywistych):

a) $\bigvee_x x^2 + y^2 = 1$,

b) $\bigwedge_x x^2 + y^2 = 1$,

c) $\bigvee_y xy = 1$,

d) $\bigwedge_y xy < 1$,

e) $\bigwedge_x x^2 + 1 < y$,

f) $\bigvee_x x^2 + y^2 = z^2$,

g) $\bigwedge_x x^2 + y^2 \neq z^2$,

h) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y^2 = z^2$,

i) $\bigvee_x \bigwedge_y xy = z$,

j) $\bigwedge_x \bigvee_y (x < z) \wedge (z < y)$,

k) $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2 + y^2 \geqslant z$,

l) $\bigvee_x (x^2 + y^2 = 1) \vee (x < x)$.

6. Zapisać za pomocą funktorów i kwantyfikatorów następujące zdania:

a) dla dowolnych a i b, dla których $a > b$, można znaleźć taką liczbę n, że $nb > a$,

b) a jest liczbą parzystą,

c) a jest sumą trzech kwadratów liczb wymiernych,

d) nie istnieje największa liczba naturalna,

e) p jest liczbą pierwszą,

f) c jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b,

g) jeżeli dwie liczby całkowite dzielą się wzajemnie jedna przez drugą, to liczby te różnią się co najwyżej znakiem,

h) liczby a i b mają takie same dzielniki,

i) układ równań $x + y = 2$, $2x + 2y = 3$ nie ma rozwiązań,

j) funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

W rozwiązaniu można użyć symbolu podzielności: dla liczb całkowitych piszemy $a|b$ wtedy i tylko wtedy, gdy b dzieli się bez reszty przez a.

7. Zaprzecz wszystkim zdaniom z zadania poprzedniego.

8. Uzasadnij, że dla dowolnych funkcji zdaniowych Φ i Ψ zdefiniowanych na tym samym uniwersum zdanie

$$\bigwedge_x (\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow \Big(\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Psi(x)\Big)$$

jest prawdziwe.

9. Wskaż przykład funkcji zdaniowych Φ i Ψ, dla których „środkowej” implikacji w zadaniu poprzednim nie można odwrócić.