Zestaw 1 — Rachunek zdań

Część A

1. Niech

$$p = \text{„pada deszcz”},$$
$$q = \text{„świeci słońce”},$$
$$r = \text{„na niebie są chmury”}.$$

Zapisz poniższe zdania przy pomocy symboli logicznych:

a) Pada deszcz i świeci słońce.
b) Jeśli pada deszcz, to na niebie są chmury.
c) Jeśli nie pada deszcz, to nie świeci słońce i na niebie są chmury.
d) Słońce świeci wtedy i tylko wtedy, gdy nie pada deszcz.
e) Jeśli nie ma chmur na niebie, to świeci słońce.

2. Ile jest funktorów zdaniotwórczych jednoargumentowych? A dwuargumentowych?

3. Przypomnij tabele prawdy dla następujących funktorów zdaniotwórczych: negacji ($\neg$), koniunkcji ($\wedge$), alternatywy ($\vee$), implikacji ($\Rightarrow$), równoważności ($\Leftrightarrow$), alternatywy wykluczającej (XOR lub $\oplus$), kreski Sheffera (NAND lub $|$) i strzałki Peirce'a (NOR lub $\downarrow$).

4. Przypomnij następujące prawa rachunku zdań: przemienność oraz łączność koniunkcji i alternatywy, rozdzielność koniunkcji względem alternatywy i alternatywy względem koniunkcji, de Morgana.

5. Sprawdź, przy pomocy tabel prawdy, że prawa z zadania 4 są rzeczywiście tautologiami rachunku zdań.

6. Sprawdź, przy pomocy tabeli prawdy, że poniższe formuły są tautologiami:

a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$,
c) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$,
d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,
e) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

7. Wypisz tabele prawdy dla formuł:

a) $p \oplus p$,
b) $(p \oplus q) \oplus r$,
c) $(p \oplus p) \oplus p$.

8. Niech n będzie dowolnie ustaloną liczbą całkowitą. Rozważmy zdanie

$$p = \text{„liczba } n \text{ jest podzielna przez 9”}.$$

Rozstrzygnij, czy jest to warunek konieczny, dostateczny, konieczny i dostateczny, czy może żaden z wymienionych dla zdania q, przy czym:

a) $q =$ „liczba n jest podzielna przez 3”,
b) $q =$ „liczba n jest podzielna przez 18”,
c) $q =$ „suma cyfr liczby n (w rozwinięciu dziesiętnym) jest podzielna przez 9”.

9. Przypomnij, czym są *koniunkcyjna postać normalna* (CNF) i *dysjunkcyjna postać normalna* (DNF).

Część B

10. Sprawdź, dowolną metodą, czy poniższe formuły są tautologiami:

a) $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow \neg r]\} \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$,

b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge \neg s) \Rightarrow q]$,

c) $[(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \Rightarrow \{[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \wedge [(q \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow p)]\}$,

d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (t \Rightarrow u)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge t) \Rightarrow (q \wedge s \wedge u)]$.

11. Wykaż, posługując się znanymi prawami rachunku zdań, że:

a) $(p \Rightarrow q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$,

b) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$,

c) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \vee q) \Rightarrow r]$.

12. Znajdź najkrótszą formułę równoważną z formułą:

a) $(p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg[(p \wedge r) \Rightarrow q]$,

b) $(q \wedge r \wedge s \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (r \wedge s)$.

13. Zbuduj formułę zależą od trzech zmiennych logicznych, która przyjmuje wartość T wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) dokładnie jedna ze zmiennych przyjmuje wartość T,

b) dokładnie dwie ze zmiennych przyjmują wartość T.

14. Wykorzystując funktory $\oplus$ oraz T, zapisz formułę równoważną z $p \Leftrightarrow q$,

15. Przy pomocy funktorów $\oplus$, $\Rightarrow$, T i F (nie musisz wykorzystywać wszystkich) zapisz formuły równoważne z $p \wedge q$ i $p \vee q$.

16. Zapisz funktory negacji, koniunkcji, alternatywy i implikacji, wykorzystując jedynie funktor NAND.

17. Opierając się na rozwiązaniu zadania 16, zbuduj przy pomocy funktora NAND oraz zmiennej p formułę, która niezależnie od wartości p przyjmie wartość T. Stwórz analogiczną formułę, która przyjmie wartość F.

18. Przedstaw formuły $p \oplus q$ i $p \oplus q \oplus r$ w koniunkcyjnej i dysjunkcyjnej postaci normalnej.

Część C

19. Wykaż, że NAND i NOR są jedynymi funktorami dwuargumentowymi, przy pomocy których można wyrazić wszystkie inne funktory jedno- i dwuargumentowe.

20. Uzasadnij, że zbiór funktorów

$$\{\oplus, \Leftrightarrow, \neg, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}$$

(T i F traktujemy jak funktory zeroargumentowe) nie jest *zupełny*, to znaczy: istnieje formuła, której nie da się w sposób równoważny zapisać przy użyciu symboli z podanego zbioru.

21. Dla dowolnej formuły CNF znajdź formułę 3-CNF (czyli taką formułę CNF, że każda jej klauzula alternatyw składa się z co najwyżej trzech literałów), która jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialna jest formuła wyjściowa.

22. Bolek, Lolek i Tola grają w następującą grę: Tola jest sama w zamkniętym pokoju, w którym na stole leży w rzędzie 9 białych, ponumerowanych (od 1 do 9), kopert. Do pokoju wchodzi Bolek. Tola podaje wybrany przez siebie numer koperty, a Bolek może, ale nie musi, oznaczyć tę kopertę znakiem X. Tola i Bolek powtarzają ten schemat 8 razy, przy czym Tola za każdym razem wybiera inną kopertę. Bolek wychodzi z pokoju, ale w żaden sposób nie może się teraz kontaktować z Lolkiem. W tym czasie Tola podchodzi do ostatniej koperty, która nie została wcześniej wskazana, i ukrywa w niej szyfr do sejfu. Może też, podobnie jak Bolek, oznaczyć tę kopertę znakiem X. W tej chwili do pokoju wchodzi Lolek i jego zadaniem jest znaleźć szyfr. Może w tym celu otworzyć maksymalnie 3 koperty. Wymyśl strategię, która gwarantuje chłopcom zwycięstwo.

23. Napisz program, który dodaje dwie liczby całkowite. W rozwiązaniu nie można użyć (jawnie lub nie) żadnego działania arytmetycznego ($+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\ldots$).

24. Przez $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2$ będziemy oznaczać zapis liczby w systemie o podstawie 2, czyli

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0,$$

przy czym $a_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ są cyframi dwójkowymi (bitami w zapisie binarnym).

Stwórz formułę, która dla zmiennych logicznych

$$p_0, p_1, \qquad q_0, q_1, \qquad r_0, r_1, r_2, r_3$$

przyjmie wartość T wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(p_1 p_0)_2 \cdot (q_1 q_0)_2 = (r_3 r_2 r_1 r_0)_2$$

(utożsamiliśmy w tej sytuacji T z 1, a F z 0). Innymi słowy, funkcja ma sprawdzać, czy dla liczb dwubitowych p i q oraz liczby czterobitowej r zachodzi równość $p \cdot q = r$.

25. Uzasadnij, że dowolny zbiór formuł zależnych od zmiennych logicznych p_1, p_2, $\dots$ (zbiór zmiennych jest nieskończony, ale każda formuła zależy tylko od skończenie wielu z nich) jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialny jest każdy jego skończony podzbiór.