Relacje

- Rachunek zdań (logika)
- Teoria mnogości
- Funkcje

X, Y - dowolne zbiory

Relację R nazywamy dowolny podzbiór $R \subset X \times Y$.

$(x,y) \in R$ będziemy zapisywać $x R y$ i czytać „x jest w relacji z y”.

Własności relacji

$X = Y, \quad R \subset X \times X$ $\{ X = \mathbb{R}, \quad R \subset \mathbb{R}^2$

1) ZWROTNOŚĆ

$$\bigwedge_{x} xRx$$

2) SYMETRYCZNOŚĆ $\bigwedge_{x,y} xRy \Rightarrow yRx$

3) ANTYSYMETRYCZNOŚĆ $\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

4) PRZECHODNIOŚĆ $\bigwedge_{x,y,z} (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

5) SPÓJNOŚĆ $\bigwedge_{x,y} xRy \vee yRx$

Przykład

$X = \mathbb{Z}$ $\quad R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\quad x - y$ jest podzielne przez 4

$x, y \in \mathbb{Z}, \quad xRy \iff \overbrace{4 \mid x - y} \iff \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 4k$

$1R5 \equiv T \qquad 1R9 \equiv T \qquad 2R4 \equiv F$

---

1) ZW. $\quad x \in \mathbb{Z} \quad xRx \iff 4 \mid x - x \iff 4 \mid 0 \quad \checkmark$

2) SYM. $\quad x, y \in \mathbb{Z} \quad xRy \iff \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 4k \iff \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} y - x = 4 \cdot (-k)$

$\iff \bigvee_{m \in \mathbb{Z}} y - x = 4 \cdot m \iff yRx$

3) ~~ANTYSYM.~~ $\quad x = 1, y = 5 \; : \; \underbrace{1R5 \wedge 5R1 \not\Rightarrow 1 = 5}_{F}$

4) PRZECH. $\quad x, y, z \in \mathbb{Z}, \quad xRy \wedge yRz \iff$

$\iff \bigvee_{k, m \in \mathbb{Z}} x - y = 4k \wedge y - z = 4m \implies \quad \{ x - z = (x - y) + (y - z)$

$\implies \bigvee_{k, m \in \mathbb{Z}} x - z = (x - y) + (y - z) = 4k + 4m = 4(k + m) \Rightarrow \bigvee_{l \in \mathbb{Z}} x - z = 4l$

$\Updownarrow$

xRz

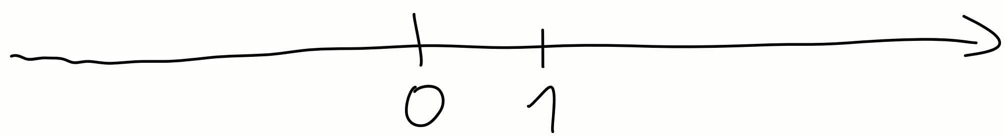
5) $\cancel{SP.}$ $\quad x = 0, y = 1 \qquad \neg(0R1) \wedge \neg(1R0)$

Relacje porządku

$R \subset X \times X$

- R nazywamy relacją częściowego porządku, jeżeli jest ona ZWROTNA, ANTYSYMETRYCZNA i PRZECHODNIA.
- Jeżeli R jest relacją częściowego porządku i jest ona SPÓJNA, to nazywamy ją relacją liniowego (lub całkowitego) porządku.

$\mathbb{R}$, $\quad x \leq y$

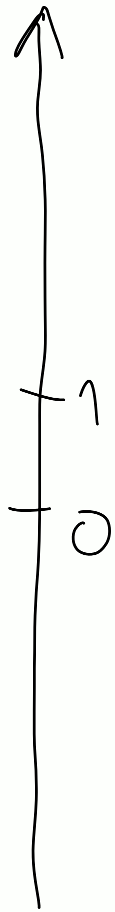


Jeżeli R jest rel. porządku, to zamiast pisać xRy będziemy pisać $x \prec y$ (x poprzedza y, y następuje po x)

x i y są porównywalne

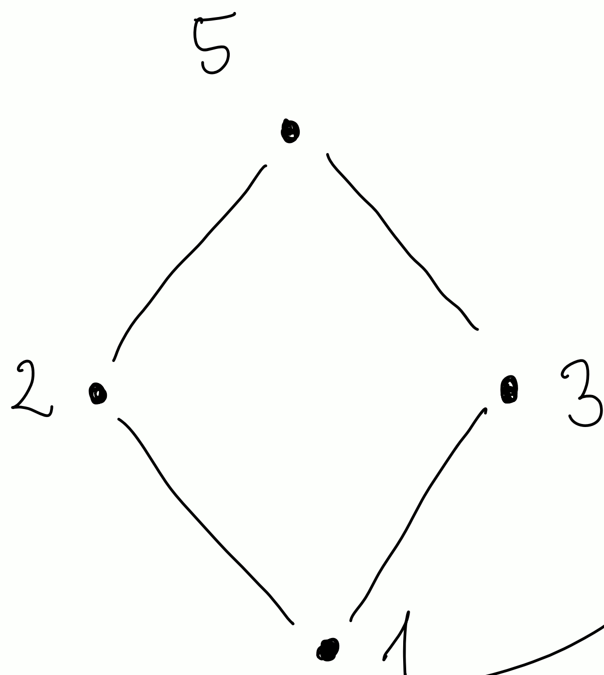
Diagramy relacji porządku

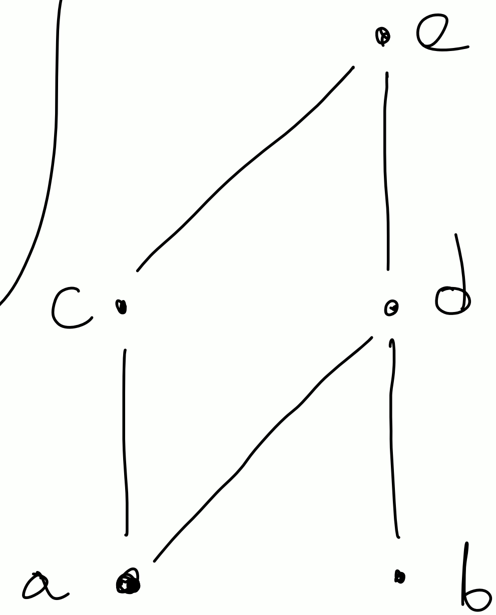
$\mathbb{R}, \leq$



$1 \prec 2 \quad 1 \prec 3$

$X = \{1,2,3,5\}, \quad \prec = \{(1,2),(1,3),(1,5),(2,5),(3,5),(1,1),(2,2),(3,3),(5,5)\}$





Przykłady

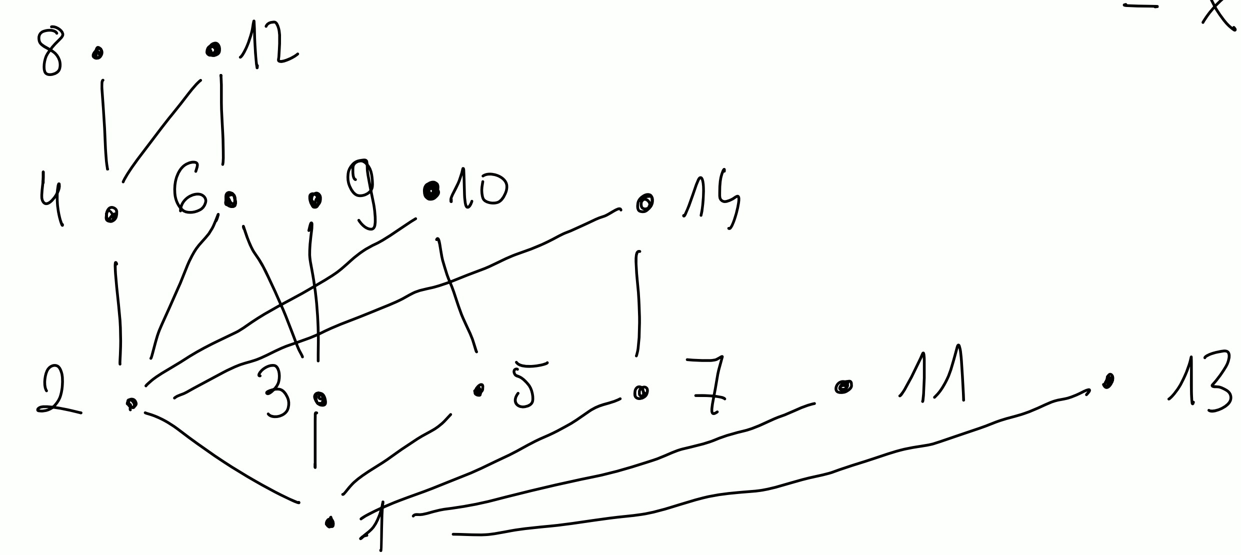
- $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ← porządek całkowity
- $(\mathbb{N}, |)$ $\quad x, y \in \mathbb{N} \quad x \prec y \overset{\text{def.}}{\iff} x | y$

ZW. $\quad x | x$ ✓ $\quad$ ANTYSYM $\quad x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$?

PRZECH. $\quad x, y, z \quad x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$

$$x|y \iff \bigvee_{k \in \mathbb{N}} y = x \cdot k \qquad y|z \iff \bigvee_{m \in \mathbb{N}} z = y \cdot m$$

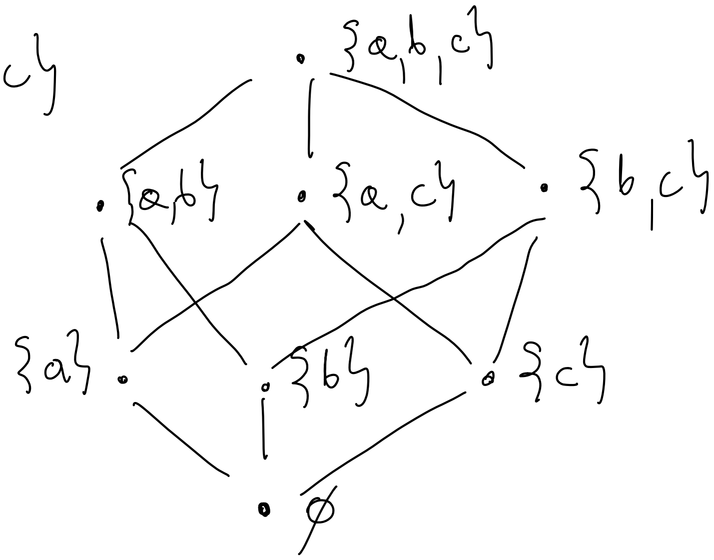
$$\bigvee_{k \in \mathbb{N}} y = x \cdot k \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N}} z = y \cdot m \Rightarrow z = y \cdot m = (x \cdot k) \cdot m = x \cdot (k \cdot m)$$



- $A \neq \emptyset$ $\qquad X = 2^A$

$x, y \in 2^A \qquad x < y \iff x \subset y$

$A = \{a, b, c\}$



Elementy wyróżnione

$(X, \prec)$

$x \in X$ nazywamy elementem maksymalnym jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} x \prec y \Rightarrow x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \neg \bigvee_{y \in X} y \neq x \wedge x \prec y$$

$x \in X$ —— " —— minimalnym, jeżeli

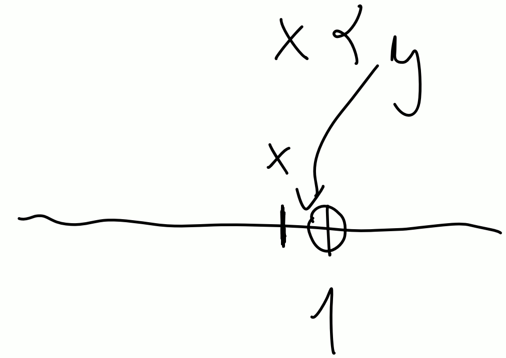
$$\bigwedge_{y \in X} y \prec x \Rightarrow x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \neg \bigvee_{y \in X} y \neq x \wedge y \prec x$$

Przykłady

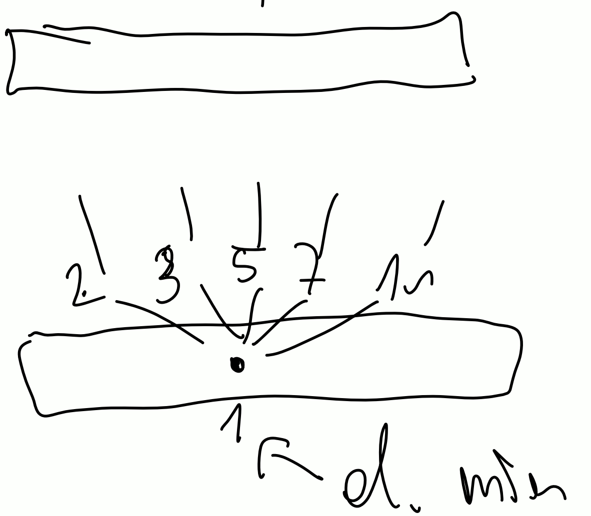
• $(\mathbb{R}, \leqslant)$ brak el. maks./min.

$\underbrace{(\langle 0,1), \leqslant)}_{}$ $(\langle 0,1) = X)$

el. minimalny, nie ma el. maks.

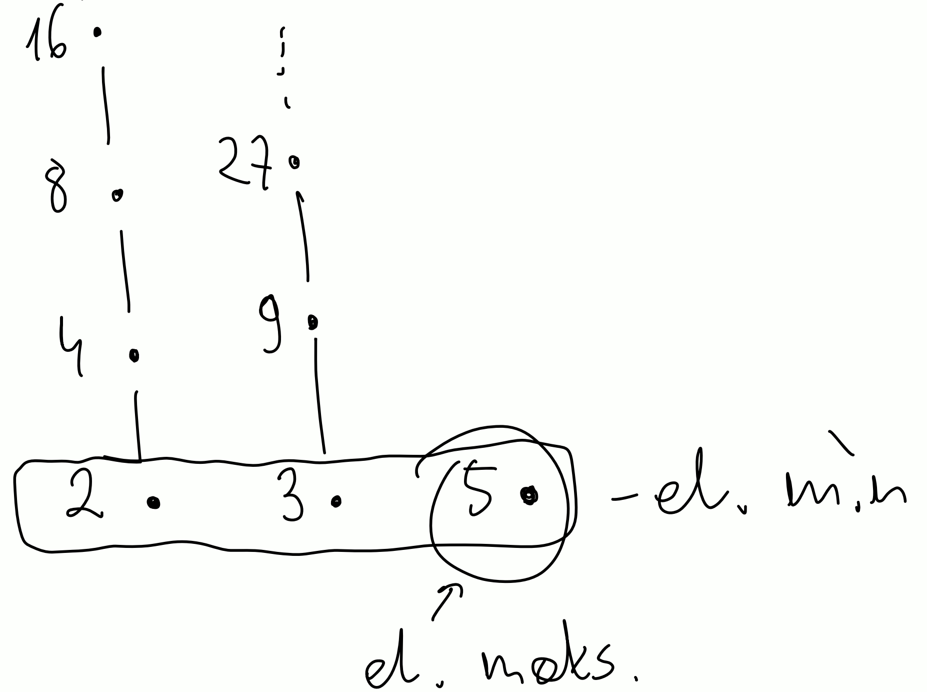


• $(\mathbb{N}, |)$



• $X = \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}$

$(X, |)$



Elementy wyróżnione

$(X, \prec)$

$x \in X$ nazywamy el. największym, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} y \prec x$$

$x \in X$ — " — najmniejszym, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} x \prec y$$