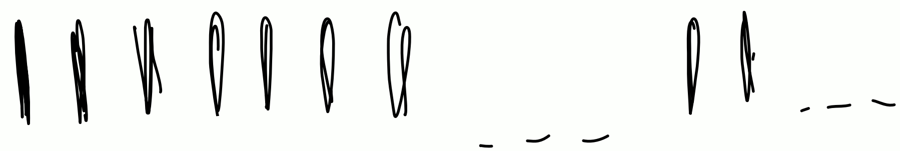
INDUKCJA

$p(n)$ – zdanie logiczne zależne od n



$p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, ...

1) $p(1)$ jest prawdą

2) $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ dla każdego n

$\Rightarrow$ $p(n)$ jest prawdą dla każdego n

Twierdzenie (Zasada indukcji matematycznej)

Niech $p(n)$ będzie zdaniem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli

1. *zdanie $p(1)$ jest prawdziwe,*
2. *dla każdego $n \in \mathbb{N}$ z prawdziwości $p(n)$ wynika prawdziwość $p(n+1)$,*

to zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Pierwszy krok indukcyjny (baza indukcji)
(warunek początkowy)

Drugi krok indukcyjny (krok indukcyjny)

Twierdzenie (Zasada indukcji matematycznej)

Załóżmy, że

1. $p(1)$,
2. $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

Wtedy

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p(n).$$

Przykład 1

Udowodnij, że

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{p(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1. $n = 1$? $\quad p(1): \quad 1 \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$

2. Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$.

Z Założenie. $\quad p(n): \quad \boxed{1 + \ldots + n} = \frac{n(n+1)}{2} \quad P$

$\Downarrow$

T Teza. $\quad p(n+1): \quad \underbrace{\boxed{1 + 2 + \ldots + n} + (n+1)}_{L} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$?

$$L = \boxed{1 + 2 + \ldots + n} + (n+1) \stackrel{\text{zał.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P.$$

Przykład 2

Udowodnij, że

$$\overbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}^{p(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1. $\underline{n=1}$. $\quad 1^2 \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{2\cdot 3}{6} = 1.$ ✓

2. $\boxed{\text{Niech } n \in \mathbb{N}.}$

(Z) $\quad \boxed{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(T) $\quad \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2}_{L} = \boxed{\frac{(n+1)\overbrace{(n+2)(2(n+1)+1)}}{6}}$?

$(n+2)(2n+3) = \boxed{2n^2 + 7n + 6}$

$L = \boxed{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{(Z)} + (n+1)^2 =$

$= \boxed{\frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}} = \frac{(n+1)\left[\boxed{2n^2 + 7n + 6}\right]}{6} = P$

Przykład 3

$n \in \mathbb{Z}$
$\{ n \geq 0 \}$

Udowodnij, że

$x \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \qquad x \geqslant -1, \ \underline{n \in \mathbb{N}}. \qquad \text{(Nierówność Bernoulliego)}$$

1. $\underline{n=1}$. $\quad (1+x)^1 \overset{?}{\geq} 1 + 1 \cdot x \iff 1+x \geq 1+x \ \checkmark$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. ? ⇓

(Z) $(1+x)^n \geq 1+nx$

(T) $\underbrace{(1+x)^{n+1} \geq \boxed{1+(n+1)x}}$?

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{\boxed{(1+x)^n}}_{\geq 1+nx \ (Z)} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \overset{(Z)}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + x + nx + nx^2 =$$

$$= 1 + x(n+1) + \underbrace{\boxed{nx^2}}_{\geq 0} \geq \boxed{1+(n+1)x}$$

Inne wersje indukcji

zdanie nr 1

$\downarrow$

$n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$

Twierdzenie

Załóżmy, że n_0 jest liczbą całkowitą oraz

1. $p(\underline{n_0})$,
2. $\bigwedge_{n \geqslant \underline{n_0}} p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

Wtedy

$$\bigwedge_{n \geqslant n_0} p(n).$$

$p(8), p(9), p(10), \ldots$

$q(1) = p(8),$

$q(2) = p(9), \ldots$

Inne wersje indukcji

Twierdzenie (Zasada indukcji zupełnej)

Załóżmy, że

1. $p(1)$,
2. *dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *z prawdziwości wszystkich zdań* $p(1), \ldots, p(n)$ *wynika prawdziwość* $p(n+1)$.

Wtedy

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p(n).$$

2. $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigwedge_{k\in\{1,\ldots,n\}} p(k) \right) \Rightarrow p(n+1)$

$q(n) = p(1) \wedge p(2) \wedge \ldots \wedge p(n)$

Przykład 4

Rozważmy ciąg określony następująco: $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ oraz

$$a_{n+2} = \boxed{3a_{n+1} - 2a_n,} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Znajdź jawny wzór na a_n dla $n \in \mathbb{N}$.

$a_1 = 3$

$a_2 = 5$

$a_3 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$

$a_4 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 17$

$a_5 = 3 \cdot 17 - 2 \cdot 9 = 33$

$\boxed{a_n \overset{?}{=} 2^n + 1}$?

$p(n)$

1. $n = 1$. $a_1 = 3$, $2^1 + 1 = 3$ ✓

$n = 2$. $a_2 = 5$, $2^2 + 1 = 5$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$.

(Z) Dla dowolnego $k \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi

$\boxed{a_k = 2^k + 1}$.

(T) $a_{n+1} = 2^{n+1} + 1$. ?

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \overset{(Z)}{=}$$

$$= 3 \cdot (2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 3 \cdot 2^n + 3 - 2^n - 2$$

$$= 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1.$$

Przykład 5

Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą $n \geqslant 0$ można przedstawić w postaci dwójkowej.

$$\forall_n \exists_{k} \exists_{c_i \in \{0,1\}} \quad n = c_k \cdot 2^k + c_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + c_1 \cdot 2^1 + c_0 \cdot 2^0 = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0)_2$$

1. $n=0$. $\quad n = 0 = (0)_2$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. (Z) Każdą liczbę $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ można zapisać w postaci dwójkowej.

(T) $n+1$ można zapisać w postaci dwójkowej.

$n+1$ jest nieparzyste $\Rightarrow$ n jest parzyste $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $n = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 0)_2 \Rightarrow$

$n+1 = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 1)_2$

$n+1$ jest parzyste

$$n+1 = 2m \overset{(2)}{=} 2 \cdot \underbrace{(c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0)_2}_{m} = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0 0)_2$$

Przykład 6

Załóżmy, że w pewnym państwie jest $n \geqslant 1$ miast i każda para miast jest połączona jedną drogą jednokierunkową. Uzasadnij, że istnieje pewna droga, która przechodzi przez wszystkie miasta.