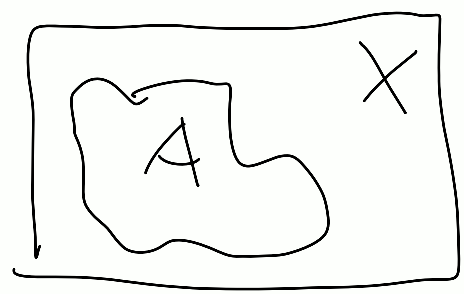
Kwantyfikatory ograniczone

X

$$\bigwedge_{x} \phi(x) \qquad \bigwedge_{x} \bigvee_{y} \phi(x,y)$$

$$\bigwedge_{x \in X} \phi(x)$$

$$\bigwedge_{x \in X} \left(x \in A^{cX} \Rightarrow \phi(x) \right)$$



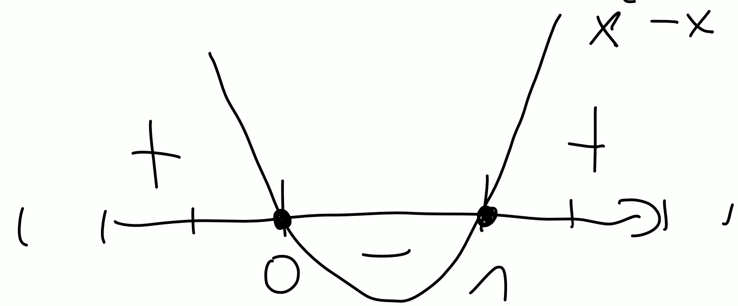
$$\downarrow$$

$$\bigwedge_{x \in A} \phi(x)$$

$X = \mathbb{R}$ $\quad \bigwedge_{x \in \mathbb{N}} \bigvee_{y \in \langle 0, +\infty)} \ldots$

Przykłady

- $\bigvee\limits_{x\in\mathbb{R}} x^3 = 1$ T $x = 1$
- $\bigvee\limits_{x\in\mathbb{R}} x^2 = -1$ F
- $\bigvee\limits_{x\in\mathbb{N}} x^2 = 2$ F
- $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} x + 1 > \sqrt[3]{x}$ F $x = -8$ $\sqrt[3]{-8} = -2$
- $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{Z}} x^2 - x \geqslant 0$ T $x^2 - x = x(x-1)$



$\mathbb{Z}$ - l. całkowite

Zmienne wolne i związane

$\phi(x,y)$

$$\bigwedge_{x} \phi(x,y) \leftarrow \phi(y)$$

funkcja zdaniowa zmiennej y

zmienna związana

zmienna wolna

Przykłady

- $\underbrace{\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} xy = 1}_{\phi(y)}$

$X = \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$

$\underline{\phi(2)} \iff \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x\cdot 2 = 1 \iff F$

Ustalmy $y \in \mathbb{R}$ i przyjmijmy $\underline{x = 0}$. Wtedy $xy = 0 \neq 1$.

$S(\phi) = \emptyset$

- $\underbrace{\bigvee_{x\in\mathbb{R}} xy = 1}_{\phi(y)}$

$\phi(2) \iff \bigvee_{x\in\mathbb{R}} x\cdot 2 = 1 \iff T$, $x = \frac{1}{2}$

$y \neq 0$

$\phi(y) \iff T \quad \left(x = \frac{1}{y}\right)$

$y = 0$

$\phi(0) \iff F$

$S(\phi) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Prawa rachunku kwantyfikatorów

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg\Big(\bigwedge_x \phi(x)\Big) \equiv \bigvee_x \neg\phi(x)$$

Prawa rachunku kwantyfikatorów

⇝ Prawa de Morgana

$$\neg\left[\bigwedge_x \Phi(x)\right] \equiv \bigvee_x \neg\Phi(x),$$

$$\neg\left[\bigvee_x \Phi(x)\right] \equiv \bigwedge_x \neg\Phi(x).$$

Prawa rachunku kwantyfikatorów

⇝ Prawa de Morgana

$$\neg\Big[\bigwedge_{x}\Phi(x)\Big] \equiv \bigvee_{x}\neg\Phi(x),$$
$$\neg\Big[\bigvee_{x}\Phi(x)\Big] \equiv \bigwedge_{x}\neg\Phi(x).$$

⇝ Prawa przemienności

$$\bigwedge_{x}\bigwedge_{y}\Phi(x,y) \equiv \bigwedge_{y}\bigwedge_{x}\Phi(x,y) \equiv \bigwedge_{x,y}\Phi(x,y),$$
$$\bigvee_{x}\bigvee_{y}\Phi(x,y) \equiv \bigvee_{y}\bigvee_{x}\Phi(x,y) \equiv \bigvee_{x,y}\Phi(x,y).$$

Prawa rachunku kwantyfikatorów

⇝ **Prawa de Morgana**

$$\neg\Big[\bigwedge_x \Phi(x)\Big] \equiv \bigvee_x \neg\Phi(x),$$
$$\neg\Big[\bigvee_x \Phi(x)\Big] \equiv \bigwedge_x \neg\Phi(x).$$

⇝ **Prawa przemienności**

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x,y) \equiv \bigwedge_y \bigwedge_x \Phi(x,y) \equiv \bigwedge_{x,y} \Phi(x,y),$$
$$\bigvee_x \bigvee_y \Phi(x,y) \equiv \bigvee_y \bigvee_x \Phi(x,y) \equiv \bigvee_{x,y} \Phi(x,y).$$

⇝

nie zależy od y

$$\bigvee_x \bigwedge_y \Phi(x,y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x \Phi(x,y).$$

$\cancel{\Leftarrow}$

może zależeć od y

Teoria mnogości — podstawowe pojęcia

- zbiór $A, B, C, \ldots$
- zbiór pusty $\emptyset$
- Element zbioru $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$
- $a \in A$ ← a jest elementem A

Konstruktory zbiorów

$$\boxed{A = \{x : \phi(x)\}}$$

$$A = \{x : x^2 + x > 0\}$$

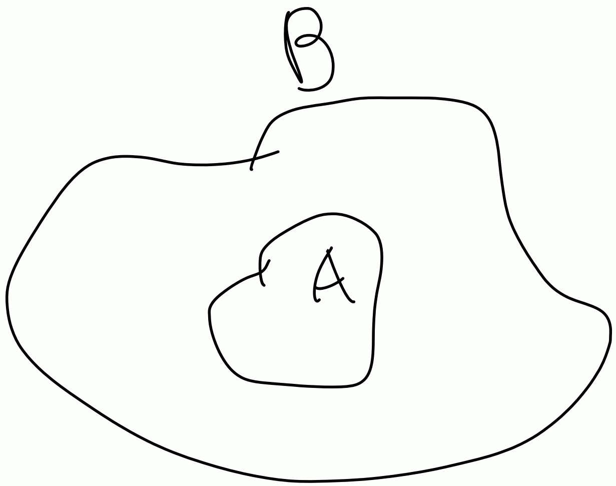
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 0\}$$

Relacje między zbiorami

- Inkluzja (zawieranie)

$$A \subset B \iff \bigwedge_{x \in X} (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

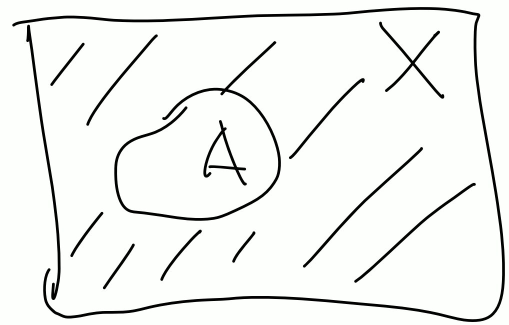
$$\iff \bigwedge_{x \in A} x \in B$$



- Równość

$$A = B \iff \bigwedge_{x \in X} (x \in A \iff x \in B)$$

Dopełnienie i zbiór potęgowy



- Dopełnienie

$$\boxed{A^c} = \{x \in X : x \notin A\} = \{x \in X : \neg\, x \in A\}$$

A', $\overline{A}$, $\overline{A}$

- Zbiór potęgowy

$A \subset B$ ← A jest podzbiorem B

A – zbiór

2^A = zbiór wszystkich podzbiorów A

$A = \{0, 1\}$ $\quad 2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

$A = \{0, 1, 5\}$

$\{0, 1\} \subset A$

$2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{5\},$
$\{0,1\}, \{0,5\}, \{1,5\},$
$\{0,1,5\} \}$

$|A| = n \qquad |2^A| = 2^n$

$\binom{n}{k} \qquad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

$(a+b)^n$

$|A| = 2 \qquad |2^A| = 4$

$|B| = 3 \qquad |2^B| = ?$

$B = \{a, b, c\}$

Zbiory liczbowe

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\cap$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\cap$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\cap$$

$$\mathbb{R}$$

$$\cancel{\{\mathbb{C}}$$

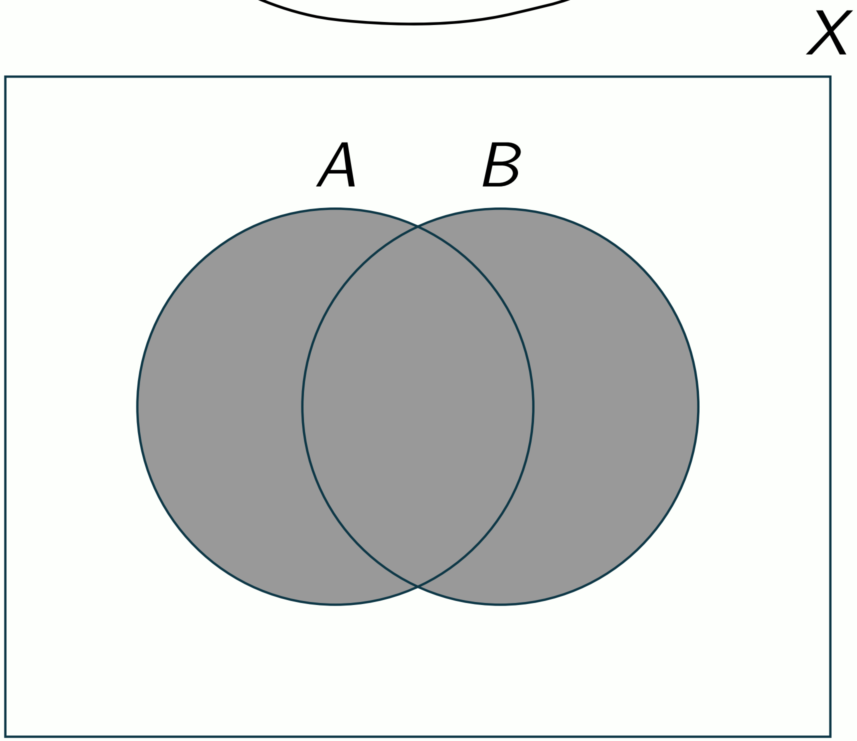
Działania na zbiorach

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$

Działania na zbiorach

⇝ Suma zbiorów

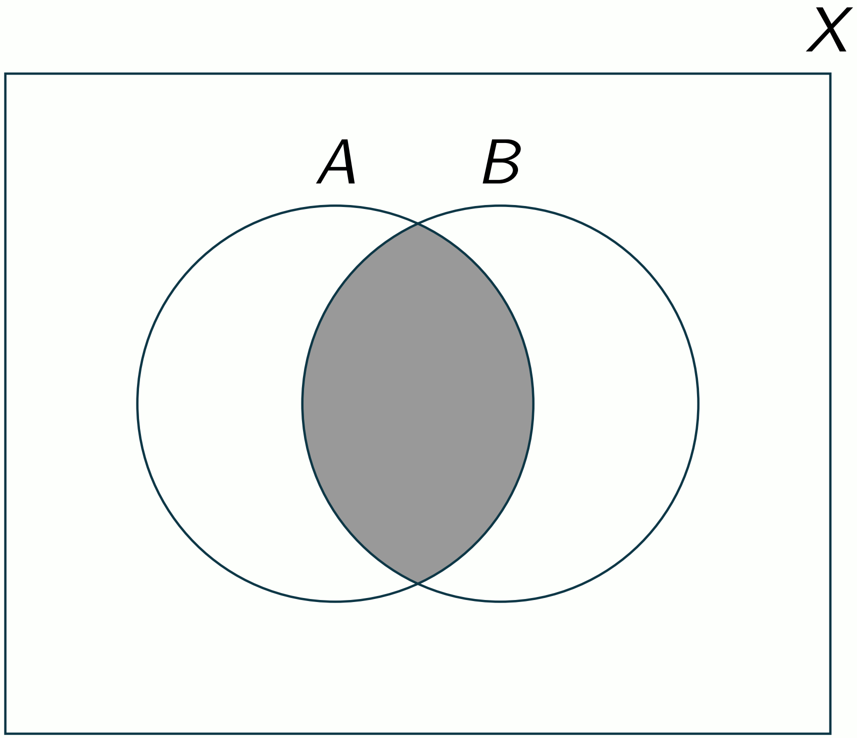
$$A \cup B := \underbrace{\{x \in X : x \in A \vee x \in B\}}$$



Działania na zbiorach

- Przecięcie (iloczyn, część wspólna) zbiorów

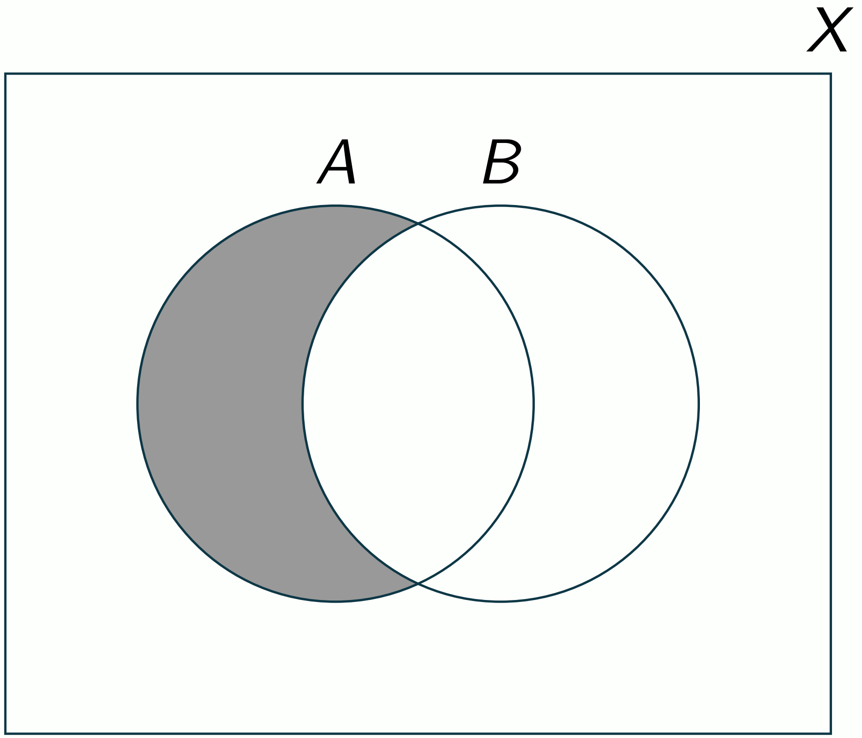
$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$



Działania na zbiorach

- Różnica zbiorów

$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$$



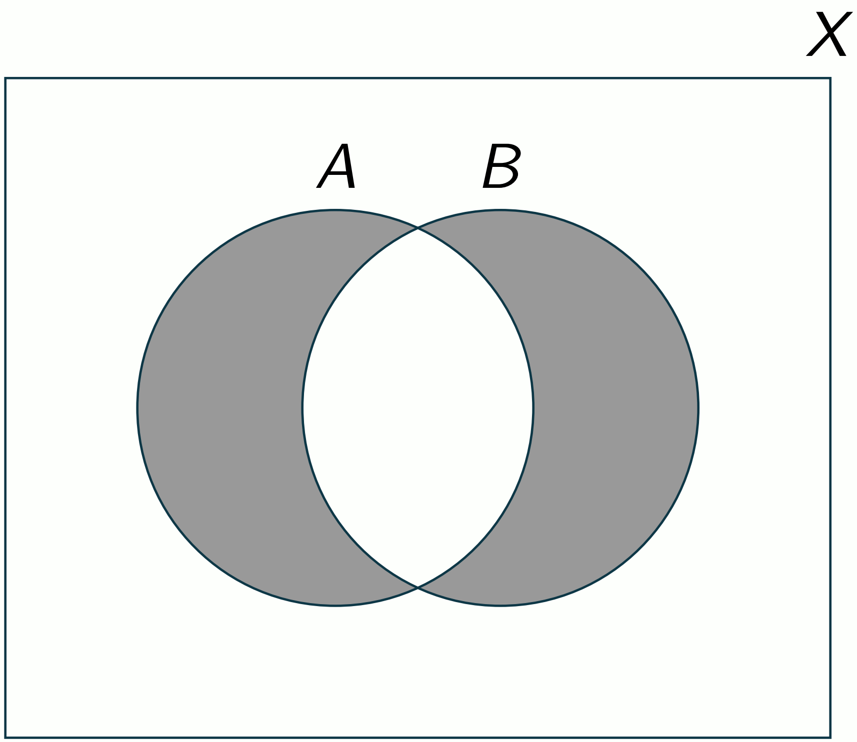
Działania na zbiorach

⇝ Różnica symetryczna

$$A \triangle B := \{x \in X : x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\}$$

$A \div B$

$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



Prawa rachunku zbiorów

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$

$$\Downarrow$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- **Prawa łączności**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Prawa rozdzielności**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

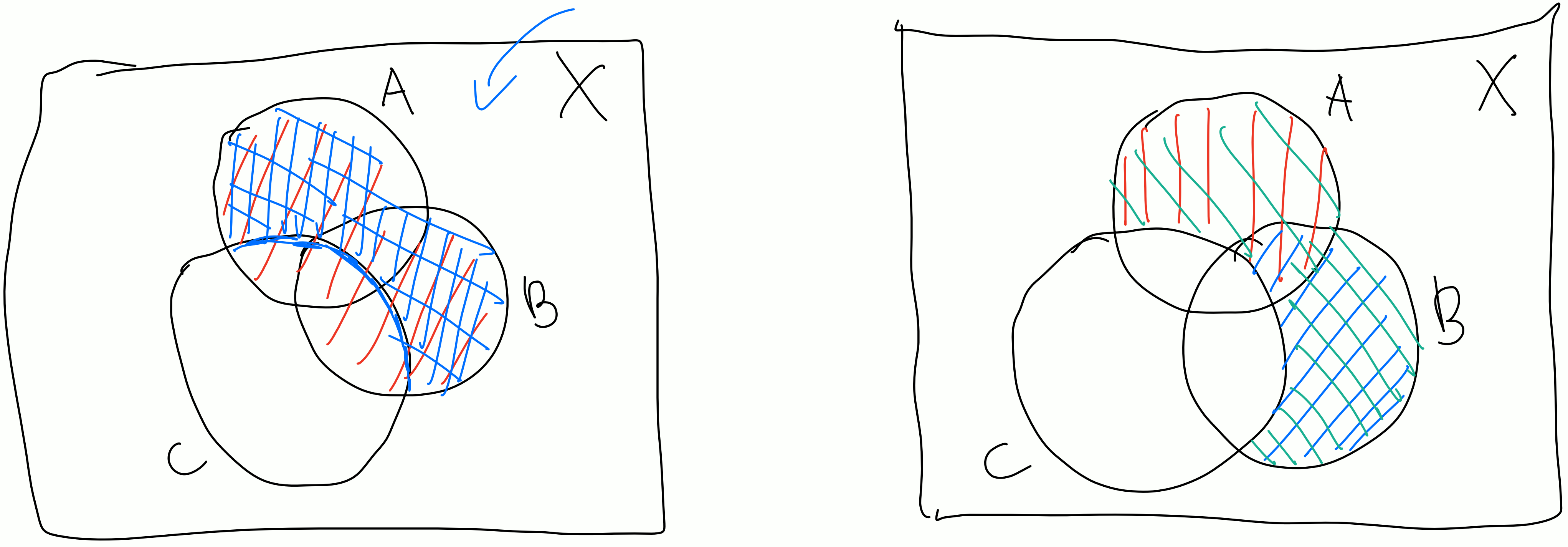
- **Prawa de Morgana**

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$



Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

$$\bigwedge_{x \in X} \quad x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$