Tautologie

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

T/F T/F

Tautologie

Definicja (Tautologia)

Tautologią nazywamy formułę, która dla dowolnego wartościowania zmiennych w niej występujących przyjmuje wartość T.

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$ TAUTOLOGIA

Uwagi

formuła

• ϕ zależy od $p_1, p_2, \ldots, p_n$

p_1	p_2	$\ldots$	p_n	ϕ
T/F	T/F	T/F	T/F	
$\vdots$				

2^n

• Jeśli dla pewnego wartościowania $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ϕ ma wartość F, to ϕ nie jest tautologią.

Postać normalna

CNF

$$(\ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \underbrace{\quad\quad}_{p \,/\, \neg p} \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots)$$

DNF

$$(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee (\ldots \wedge \underbrace{\quad\quad}_{p \,/\, \neg p} \wedge \ldots) \vee \ldots \vee (\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots)$$

Postać normalna

Definicja (Koniunkcyjna postać normalna, CNF)

Powiemy, że formuła logiczna jest zapisana w **koniunkcyjnej postaci normalnej**, jeżeli jest postaci

$$(p_1 \vee \ldots \vee p_{n_p}) \wedge (q_1 \vee \ldots \vee q_{n_q}) \wedge \ldots \wedge (r_1 \vee \ldots \vee r_{n_r}),$$

przy czym wszystkie wyrażenia występujące w nawiasach są **literałami** (zmienną logiczną bądź negacją zmiennej logicznej: p lub $\neg p$).

$$(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee p_1)$$

Postać normalna

Definicja (Dysjunkcyjna postać normalna, DNF)

$$(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{n_p}) \vee (q_1 \wedge \ldots \wedge q_{n_q}) \vee \ldots \vee (r_1 \wedge \ldots \wedge r_{n_r}).$$

Postać normalna

Twierdzenie

Każdą formułę można zapisać w równoważnej postaci normalnej (CNF i DNF).

Dowód.

$\phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$

p_1	p_2	$\dots$	p_n	ϕ
T	T	$\dots$	T	F
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	T
				T
				F
				$\vdots$

$$(p \oplus q) \mid r \equiv \neg\left(\left((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)\right) \wedge r\right)$$

$p \oplus q$

p	q	r	$(p \oplus q) \mid r$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
F	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

DNF:

$(p \wedge q \wedge r) \vee$

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee$

$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$

$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee$

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee$

$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

CNF

$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge$

$(p \vee \neg q \vee \neg r)$

Zupełność

Definicja (Zupełny zbiór funktorów)

Powiemy, że zbiór funktorów A jest **zupełny**, jeżeli każdą formułę można w sposób równoważny zapisać przy wykorzystaniu wyłącznie funktorów ze zbioru A.

Tw. CNF i DNF

$\Downarrow$

Wniosek

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ jest zupełny.

Zupełność

Zupełność

16

T o T

F o F

Twierdzenie

Zbiory

$$\{\wedge, \neg\}, \quad \{\vee, \neg\}, \quad \{\text{NAND}\}, \quad \{\text{NOR}\}$$

są zupełne.

Dowód.

$\boxed{\{\wedge, \neg\}}$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$p | p \equiv \neg p$$

$$p \wedge q \equiv \neg(\underbrace{\neg(p \wedge q)}_{p|q}) \equiv \neg(p|q) \equiv (p|q)|(p|q)$$

Spełnialność formuł

Definicja (Formuła spełnialna)

Powiemy, że formuła jest **spełnialna**, jeżeli **istnieje** takie wartościowanie zmiennych w niej występujących, przy którym przyjmie ona wartość T.

Spełnialność formuł

Definicja (Formuła spełnialna)

Powiemy, że formuła jest **spełnialna**, jeżeli **istnieje** takie wartościowanie zmiennych w niej występujących, przy którym przyjmie ona wartość T.

$$\{\overbrace{[(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \wedge s)]}^{T} \wedge \neg(q \wedge s)\} \wedge \overbrace{(\neg p \Rightarrow s)}^{T}$$

$p = T$, $r = F$

F

$q = F$, $s = F$

T

$p = T$

$p = T$, $q = F$, $r = F$, $s = F$ $\to T$

Funkcje zdaniowe

$$x^2 - 3x + 5 \geq 0$$

$$x = x + 1$$

Funkcje zdaniowe

Definicja (Funkcja zdaniowa jednej zmiennej)

Funkcją zdaniową jednej zmiennej nazywamy wyrażenie postaci $\Phi(x)$, zależne od zmiennej $x \in X$, które dla dowolnej wartości x staje się zdaniem logicznym.

Zbiór X nazywamy **zakresem zmienności** lub **dziedziną** funkcji zdaniowej Φ.

$X = \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \left(x^2 - 3x - 5 \geq 0 \right)$$

$$= \begin{cases} T, & \text{gdy } x^2 - 3x - 5 \geq 0, \\ F, & \text{gdy } x^2 - 3x - 5 < 0. \end{cases}$$

$\phi(0) = F$, $\phi(5) = T$

Funkcje zdaniowe

Funkcje zdaniowe

Definicja (Wykres funkcji zdaniowej)

Wykresem funkcji zdaniowej Φ nazywamy zbiór

$$S(\Phi) := \{x \in X : \Phi(x)\},$$

to znaczy zbiór wszystkich elementów $x \in X$, dla których zdanie $\Phi(x)$ ma wartość logiczną T.

$$\phi(x) = \left(x^2 - 3x - 5 \geq 0 \right)$$

$$\Delta = 9 + 20 = 29$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \qquad x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{2}$$

$$S(\phi) = \left(-\infty, \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3-\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$$

Funkcje zdaniowe

Definicja (Funkcja zdaniowa wielu zmiennych)

Funkcją zdaniową n zmiennych nazywamy wyrażenie postaci $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, które dla dowolnych wartości $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ staje się zdaniem logicznym.

Funkcje zdaniowe

Definicja (Funkcja zdaniowa wielu zmiennych)

Funkcją zdaniową n zmiennych nazywamy wyrażenie postaci $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, które dla dowolnych wartości $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ staje się zdaniem logicznym.

Definicja (Wykres funkcji zdaniowej wielu zmiennych)

Wykresem funkcji zdaniowej $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy zbiór

$$S(\Phi) := \{x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n \colon \Phi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

$$\phi(x,y) = (x^2 y + y^2 + 5xy \geq 0).$$

Kwantyfikatory

$X = \mathbb{R}$

$$\bigwedge_{x} x^2 - 3x - 5 \geq 0$$

F

kwantyfikator ogólny

„dla każdego"

$$\bigvee_{x} x^2 - 3x - 5 \geq 0$$

kwantyfikator szczegółowy

„istnieje"

Kwantyfikatory

Definicja (Kwantyfikator ogólny)

Zdanie

$$\text{dla każdego } x \text{ zachodzi } \Phi(x)$$

zapisujemy w postaci

$$\bigwedge_{x} \Phi(x),$$

a symbol $\bigwedge$ nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym**.

Kwantyfikatory

Definicja (Kwantyfikator szczegółowy)

Zdanie

istnieje taki x, że zachodzi $\Phi(x)$

zapisujemy w postaci

$$\bigvee_{x} \Phi(x),$$

a symbol $\bigvee$ nazywamy **kwantyfikatorem szczegółowym**.