Matematyka dyskretna

Wykład 1

Adam Gregosiewicz

13 października 2023 r.

Zdania

Definicja (Zdanie logiczne)

Zdaniem logicznym nazywamy dowolne stwierdzenie, któremu można przyporządkować wartość logiczną **prawda** lub **fałsz**.

T F

(1) (0)

... i ...

... lub ...

jeżeli ..., to ...

... wtedy i tylko wtedy, gdy ...

Podstawowe funktory zdaniotwórcze

- **koniunkcja**: $\wedge$

  $p \wedge q$ czytamy: p **i** q

Podstawowe funktory zdaniotwórcze

- **koniunkcja**: $\wedge$

  $p \wedge q$ czytamy: p **i** q

- **alternatywa**: $\vee$

  $p \vee q$ czytamy: p **lub** q

Podstawowe funktory zdaniotwórcze

- **koniunkcja**: $\wedge$
  $p \wedge q$ czytamy: p **i** q

- **alternatywa**: $\vee$
  $p \vee q$ czytamy: p **lub** q

- **implikacja**: $\Rightarrow$
  $p \Rightarrow q$ czytamy: **jeżeli** p, **to** q (lub: z p wynika q)

Podstawowe funktory zdaniotwórcze

- **koniunkcja**: $\wedge$
  $p \wedge q$ czytamy: p **i** q

- **alternatywa**: $\vee$
  $p \vee q$ czytamy: p **lub** q

- **implikacja**: $\Rightarrow$
  $p \Rightarrow q$ czytamy: **jeżeli** p, **to** q (lub: z p wynika q)

- **równoważność**: $\Leftrightarrow$
  $p \Leftrightarrow q$ czytamy: p **wtedy i tylko wtedy, gdy** q

Podstawowe funktory zdaniotwórcze

- **koniunkcja**: $\wedge$
  $p \wedge q$ czytamy: p **i** q

- **alternatywa**: $\vee$
  $p \vee q$ czytamy: p **lub** q

- **implikacja**: $\Rightarrow$
  $p \Rightarrow q$ czytamy: **jeżeli** p, **to** q (lub: z p wynika q)

- **równoważność**: $\Leftrightarrow$
  $p \Leftrightarrow q$ czytamy: p **wtedy i tylko wtedy, gdy** q

- **zaprzeczenie**: $\neg$
  $\neg p$ czytamy: **nie** p

Warunek konieczny i dostateczny

$$p \Rightarrow q$$

p jest warunkiem <u>dostatecznym</u> dla q

q jest warunkiem <u>koniecznym</u> dla p

Warunek konieczny i dostateczny

$$p \Rightarrow q$$

- p jest warunkiem **dostatecznym** (wystarczającym) dla q.
- q jest warunkiem **koniecznym** dla p.

Podstawowe funktory zdaniotwórcze

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

p	$\neg p$
T	F
F	T

Funktory zdaniotwórcze

p	q	p ∘ q	
T	T	T/F	2
T	F	T/F	2
F	T	T/F	2
F	F	T/F	2

$2^4 = 16$

p	∘p	
T	T/F	2
F	T/F	2

$2^2 = 4$

Funktory zdaniotwórcze

- $\rightsquigarrow$ **alternatywa wykluczająca** lub **XOR**: $\oplus$

  $p \oplus q \quad \equiv \quad \neg(p \Leftrightarrow q)$

Funktory zdaniotwórcze

- ⇝ **alternatywa wykluczająca** lub **XOR**: $\oplus$
  $p \oplus q \quad \equiv \quad \neg(p \Leftrightarrow q)$
- ⇝ **kreska Sheffera** lub **NAND**: $|$
  $p \mid q \quad \equiv \quad \neg(p \wedge q)$

Funktory zdaniotwórcze

- **alternatywa wykluczająca** lub **XOR**: $\oplus$
  $p \oplus q \quad \equiv \quad \neg(p \Leftrightarrow q)$

- **kreska Sheffera** lub **NAND**: $\mid$
  $p \mid q \quad \equiv \quad \neg(p \wedge q)$

- **strzałka Peirce'a** lub **NOR**: $\downarrow$
  $p \downarrow q \quad \equiv \quad \neg(p \vee q)$

p	q	$p \oplus q$	$p \mid q$	$p \downarrow q$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	T	T	F
F	F	F	T	T

Formuły logiczne

Formuły logiczne

Definicja (Zmienna logiczna)

Zmienną logiczną nazywamy zmienną, zwykle oznaczaną p, q, r, ..., która może przyjąć tylko dwie wartości: prawda (T) lub fałsz (F).

$$\neg\Big(r \oplus \big((p \wedge q) \Rightarrow p\big)\Big)$$

Formuły logiczne

Definicja (Zmienna logiczna)

Zmienną logiczną nazywamy zmienną, zwykle oznaczaną p, q, r, ..., która może przyjąć tylko dwie wartości: prawda (T) lub fałsz (F).

Definicja (Formuła logiczna)

Formułą nazywamy wyrażenie (napis) zbudowane według następujących reguł:

- każda zmienna logiczna jest formułą,
- jeżeli ϕ jest formułą, to $(\neg\phi)$ jest formułą,
- jeżeli ϕ oraz ψ są formułami, to $(\phi \circ \psi)$, gdzie $\circ$ jest funktorem dwuargumentowym, jest formułą.

$(((p \wedge q) \Rightarrow p) | (r))$

$p \Rightarrow \Rightarrow q$

$p \Rightarrow$

$p \Rightarrow (q \wedge r$

Równoważność formuł logicznych

$\phi, \psi \quad \phi \equiv p \oplus q \qquad \psi \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$

Równoważność formuł logicznych

Definicja (Formuły równoważne)

Formuły ϕ i ψ są **równoważne**, jeżeli przy dowolnym wartościowaniu zmiennych logicznych w nich występujących przyjmują tę samą wartość logiczną. Piszemy wtedy

$$\phi \equiv \psi.$$

Prawa rachunku zdań

Prawa rachunku zdań

- **Prawo podwójnego przeczenia**
  $\neg(\neg p) \equiv p$

Prawa rachunku zdań

- **Prawo podwójnego przeczenia**
  $\neg(\neg p) \equiv p$
- **Prawa przemienności**
  $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

Prawa rachunku zdań

- **Prawo podwójnego przeczenia**
  $\neg(\neg p) \equiv p$
- **Prawa przemienności**
  $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
- **Prawa łączności**
  $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
  $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$

Prawa rachunku zdań

- **Prawo podwójnego przeczenia**
  $\neg(\neg p) \equiv p$
- **Prawa przemienności**
  $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
- **Prawa łączności**
  $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
  $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$
- **Prawa rozdzielności**
  $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
  $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Prawa rachunku zdań

- **Prawo podwójnego przeczenia**
  $\neg(\neg p) \equiv p$
- **Prawa przemienności**
  $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
- **Prawa łączności**
  $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
  $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$
- **Prawa rozdzielności**
  $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
  $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.
- **Prawa de Morgana**
  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

Prawa rachunku zdań

- **Prawo podwójnego przeczenia**
  $\neg(\neg p) \equiv p$
- **Prawa przemienności**
  $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
- **Prawa łączności**
  $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
  $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$
- **Prawa rozdzielności**
  $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
  $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.
- **Prawa de Morgana**
  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
- **Prawo kontrapozycji**
  $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$