Zestaw 3 — Teoria mnogości

Część A

1. Niech

$A = \{x \in \mathbb{R}\colon (x-1)^2 \leqslant 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}\colon |x-3| > 2\}, \quad C = \Big\{x \in \mathbb{R}\colon \bigwedge_{a \in \mathbb{R}} x^2 + (a+1)x \leqslant 2\Big\}.$

Wyznacz $(A \cup B) \setminus C$, $(B \setminus C) \cap A$ i $A \setminus (B \setminus C)$, $(A \setminus C) \triangle B$.

2. Wyznacz iloczyn kartezjański $A \times B$ i $B \times A$ dla zbiorów:

a) $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$,
b) $A = \{0,1,2\}$, $B = \{2,3\}$,
c) $A = \emptyset$, $B = \{1,2,3\}$.

3. Wyznaczyć zbiory $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$, $A \times B \times C$, przy czym $A = \{0,1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2,3\}$.

4. Podaj warunek równoważny równości

$$A \times B = B \times A.$$

5. Wyznacz zbiór potęgowy dla zbiorów:

a) $\{1,2,3\}$,
b) $\emptyset$,
c) $\{\emptyset\}$,
d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Część B

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
c) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$,
d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
e) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$,
f) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

7. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D prawdziwe są implikacje:

a) $(A \subset B \wedge C \subset D) \quad \Rightarrow \quad (A \cup C \subset B \cup D)$,
b) $(A \subset B \wedge C \subset D) \quad \Rightarrow \quad (A \setminus D \subset B \setminus C)$,
c) $A \triangle B$ i $B \triangle C$ są zbiorami skończonymi $\quad \Rightarrow \quad$ $A \triangle C$ jest zbiorem skończonym.

8. Zdefiniujmy parę uporządkowaną (x, y) jako

$$(x, y) \coloneqq \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Wykaż, że

$$(x, y) = (a, b) \qquad \iff \qquad x = a \quad \text{i} \quad y = b.$$

9. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory $A \times B$ i $B \times A$ dla:

a) $A = \{y \in \mathbb{R}\colon -1 < y < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < x \leqslant 1\}$,
b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \langle 1, 2)$,
c) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 + x - 2 \geqslant 0\}$, $B = \{b \in \mathbb{N}\colon 2^b < 11\}$,
d) $A = \{x \in \langle 0, \infty)\colon \frac{x-1}{x+1} < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 \leqslant 4\}$.

10. Sprawdź, czy podane równości są prawdziwe:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

b) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

11. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego

$$\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\}} A_k \in \mathcal{A} \qquad \text{oraz} \qquad X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{A}.$$

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.

Część C

12. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego

$$\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\}} A_k \in \mathcal{A} \qquad \text{oraz} \qquad (X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{A}) \Rightarrow (X \cup Y \in \mathcal{A} \wedge X \setminus Y \in \mathcal{A}).$$

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.