Matematyka dyskretna
Relacje

Adam Gregosiewicz

10 listopada 2022 r.

Relacje

Definicja (Relacja)

Dowolny podzbiór zbioru $X \times Y$ nazywamy **relacją dwuargumentową**.

Relacje

Definicja (Relacja)

Dowolny podzbiór zbioru $X \times Y$ nazywamy **relacją dwuargumentową**.

Jeżeli $R \subset X \times Y$ i $(x, y) \in R$, to mówimy, że elementy x i y są ze sobą w relacji R i piszemy xRy.

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

$\rightsquigarrow$ **zwrotna**, gdy

$$\bigwedge_{x} xRx,$$

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

$\rightsquigarrow$ **zwrotna**, gdy

$$\bigwedge_{x} xRx,$$

$\rightsquigarrow$ **symetryczna**, gdy

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow yRx),$$

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

- **zwrotna**, gdy
$$\bigwedge_{x} xRx,$$
- **symetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow yRx),$$
- **antysymetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y,$$

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

- **zwrotna**, gdy
$$\bigwedge_{x} xRx,$$
- **symetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow yRx),$$
- **antysymetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y,$$
- **przechodnia**, gdy
$$\bigwedge_{x,y,z} (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz,$$

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

$\rightsquigarrow$ **zwrotna**, gdy

$$\bigwedge_{x} xRx,$$

$\rightsquigarrow$ **symetryczna**, gdy

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow yRx),$$

$\rightsquigarrow$ **antysymetryczna**, gdy

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y,$$

$\rightsquigarrow$ **przechodnia**, gdy

$$\bigwedge_{x,y,z} (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz,$$

$\rightsquigarrow$ **spójna**, gdy

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \vee yRx).$$

Przykład

Niech R będzie relacją w $\mathbb{Z}$ zdefiniowaną następująco

$$xRy \qquad \iff \qquad 4|(y-x).$$

Przykład

Niech R będzie relacją w $\mathbb{Z}$ zdefiniowaną następująco

$$xRy \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4|(y-x).$$

Czy jest to relacja zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, spójna?

Przykład

Niech R będzie relacją w $\mathbb{Z}$ zdefiniowaną następująco

$$xRy \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4|(y-x).$$

Czy jest to relacja zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, spójna?

Jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Relacje porządku

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją w X.

Relacje porządku

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją w X.

Definicja (Porządek częściowy)

Jeżeli relacja jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, to nazywamy ją relacją **częściowo porządkującą**, a zbiór X **częściowo uporządkowanym**.

Relacje porządku

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją w X.

Definicja (Porządek częściowy)

Jeżeli relacja jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, to nazywamy ją relacją **częściowo porządkującą**, a zbiór X **częściowo uporządkowanym**.

Definicja (Porządek liniowy/całkowity)

Jeżeli relacja jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna, to nazywamy ją relacją **liniowo porządkującą**, a zbiór X **liniowo uporządkowanym**.

Relacje porządku

Jeżeli R jest relacją porządku, to często zamiast xRy piszemy

$$x \prec y.$$

Mówimy w tym przypadku, że x **poprzedza** y lub y **następuje po** x.

Relacje porządku

Jeżeli R jest relacją porządku, to często zamiast xRy piszemy

$$x \prec y.$$

Mówimy w tym przypadku, że x **poprzedza** y lub y **następuje po** x.

Jeżeli $x \prec y$ lub $y \prec x$ to mówimy, że elementy x i y są **porównywalne**.

Przykłady

- Relacja $\leqslant$ jest relacją całkowicie porządkującą w $\mathbb{R}$.
- Relacja podzielności $|$ jest relacją częściowego porządku w $\mathbb{N}$.
- Relacja inkluzji $\subset$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze potęgowym 2^A ustalonego zbioru A.

Zawężenie porządku

Jeżeli $\prec$ jest relacją porządku w X oraz $Y \subset X$, to $\prec$ (zawężona do Y) jest również relacją porządku w Y.

Elementy wyróżnione

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

- Element $x \in Y$ nazywamy **elementem maksymalnym** w Y, jeżeli nie poprzedza on żadnego innego elementu zbioru Y, to znaczy

$$\neg \bigvee_{y \in Y} (y \neq x \wedge x \prec y).$$

- Element $x \in Y$ nazywamy **elementem minimalnym** w Y, jeżeli nie poprzedza go żaden inny element zbioru Y, to znaczy

$$\neg \bigvee_{y \in Y} (y \neq x \wedge y \prec x).$$

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

- $\rightsquigarrow$ Elementem minimalnym Y jest 0.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór Y nie posiada elementu maksymalnego.

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $\mid$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $\mid$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

- $\rightsquigarrow$ Elementami minimalnymi Y są 2, 3 i 5.
- $\rightsquigarrow$ Elementem maksymalnym Y jest 5.

Elementy wyróżnione

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

- Element $x \in Y$ nazywamy **elementem największym** w Y, jeżeli następuje po wszystkich elementach zbioru Y, to znaczy

$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

- Element $x \in Y$ nazywamy **elementem najmniejszym** w Y, jeżeli poprzedza wszystkie elementy zbioru Y, to znaczy

$$\bigwedge_{y \in Y} x \prec y.$$

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

- $\rightsquigarrow$ Elementem najmniejszym Y jest 0.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór Y nie posiada elementu największego.

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

- $\leadsto$ Zbiór Y nie posiada elementu najmniejszego.
- $\leadsto$ Zbiór Y nie posiada elementu największego.

Własności elementów wyróżnionych

- W zbiorze uporządkowanym **może istnieć więcej niż jeden** element minimalny i **więcej niż jeden** element maksymalny.

Własności elementów wyróżnionych

- W zbiorze uporządkowanym **może istnieć więcej niż jeden** element minimalny i **więcej niż jeden** element maksymalny.
- W zbiorze uporządkowanym **istnieje co najwyżej jeden** element największy oraz **co najwyżej jeden** element najmniejszy.

Własności elementów wyróżnionych

- W zbiorze uporządkowanym **może istnieć więcej niż jeden** element minimalny i **więcej niż jeden** element maksymalny.
- W zbiorze uporządkowanym **istnieje co najwyżej jeden** element największy oraz **co najwyżej jeden** element najmniejszy.
- **Jeżeli** w zbiorze uporządkowanym **istnieje** element największy (najmniejszy), to jest on **jedyny** i jest jednocześnie jedynym elementem maksymalnym (minimalnym).

Kresy zbioru

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

$\rightsquigarrow$ Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

Kresy zbioru

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

- $\rightsquigarrow$ Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

- $\rightsquigarrow$ Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} x \prec y.$$

Kresy zbioru

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

- Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

- Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} x \prec y.$$

- Jeżeli istnieje **najmniejsze** ograniczenie górne zbioru Y, to nazywamy je **kresem górnym** zbioru Y.

Kresy zbioru

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

- Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

- Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} x \prec y.$$

- Jeżeli istnieje **najmniejsze** ograniczenie górne zbioru Y, to nazywamy je **kresem górnym** zbioru Y.
- Jeżeli istnieje **największe** ograniczenie dolne zbioru Y, to nazywamy je **kresem dolnym** zbioru Y.

Kresy zbioru

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

Kresy zbioru

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

- $\rightsquigarrow$ Zbiorem ograniczeń dolnych Y jest zbiór $(-\infty, 0\rangle$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiorem ograniczeń górnych Y jest zbiór $\langle 1, +\infty)$.
- $\rightsquigarrow$ Kresem dolnym zbioru Y jest 0.
- $\rightsquigarrow$ Kresem górnym zbioru Y jest 1.

Kresy zbioru

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

Kresy zbioru

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

- $\rightsquigarrow$ Zbiorem ograniczeń dolnych jest $\{1\}$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór Y nie ma ograniczeń górnych.
- $\rightsquigarrow$ Kresem dolnym zbioru Y jest 1.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór Y nie ma kresu dolnego.

Własności elementów wyróżnionych

- W niepustym i **skończonym** podzbiorze Y zbioru uporządkowanego $(X, \prec)$ istnieje co najmniej jeden element maksymalny i co najmniej jeden element minimalny.
- Jeżeli w niepustym i **skończonym** podzbiorze Y zbioru uporządkowanego $(X, \prec)$ istnieje dokładnie jeden element maksymalny (minimalny), to jest on jednocześnie elementem największym (najmniejszym) i kresem górnym (dolnym) zbioru Y.

Własności kresów

- Jeżeli w zbiorze uporządkowanym Y istnieje kres górny (dolny), to nie musi on być elementem zbioru Y.

Własności kresów

- Jeżeli w zbiorze uporządkowanym Y istnieje kres górny (dolny), to nie musi on być elementem zbioru Y.
- W dowolnym zbiorze uporządkowanym Y może istnieć co najwyżej jeden kres góry (dolny).

Relacje równoważności

Definicja (Relacja równoważności)

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy **relacją równoważności.**

Relacje równoważności

Definicja (Relacja równoważności)

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy **relacją równoważności.**

Definicja (Klasa abstrakcji)

Klasą abstrakcji elementu x względem relacji $\sim$ w X nazywamy zbiór

$$[x] \coloneqq \{y \in X \colon y \sim x\}.$$

Relacje równoważności

Definicja (Relacja równoważności)

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy **relacją równoważności.**

Definicja (Klasa abstrakcji)

Klasą abstrakcji elementu x względem relacji $\sim$ w X nazywamy zbiór

$$[x] := \{y \in X \colon y \sim x\}.$$

Zbiór wszystkich klas abstrakcji nazywamy **zbiorem ilorazowym** i oznaczamy $(X/\sim)$.

Relacje równoważności

Niech $X = \mathbb{Z}$, a relacja $\sim$ będzie zdefiniowana jako

$$a \sim b \qquad \iff \qquad 3|(a-b).$$

Na przykład

$$1 \sim 10, \qquad -3 \sim 0, \qquad 11 \sim 2.$$

Relacje równowazności

Niech $X = \mathbb{Z}$, a relacja $\sim$ będzie zdefiniowana jako

$$a \sim b \qquad \iff \qquad 3|(a-b).$$

Na przykład

$$1 \sim 10, \qquad -3 \sim 0, \qquad 11 \sim 2.$$

Jest to relacja równoważności.

Relacje równowazności

Niech $X = \mathbb{Z}$, a relacja $\sim$ będzie zdefiniowana jako

$$a \sim b \qquad \iff \qquad 3|(a-b).$$

Na przykład

$$1 \sim 10, \qquad -3 \sim 0, \qquad 11 \sim 2.$$

Jest to relacja równoważności.

Klasami abstrakcji są zbiory

$$\begin{aligned} [0] &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}, \\ [1] &= \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 5, \ldots\}, \\ [2] &= \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}. \end{aligned}$$

Zasada abstrakcji

Twierdzenie (Zasada abstrakcji)

Jeżeli $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze X, to

- $\rightsquigarrow$ *wszystkie klasy abstrakcji są niepuste,*
- $\rightsquigarrow$ *każdy element $x \in X$ należy do pewnej klasy abstrakcji,*
- $\rightsquigarrow$ *dwie klasy abstrakcji są albo równe, albo nie mają elementów wspólnych.*

Przykład

Niech $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $\sim$ niech będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ zdefiniowaną następująco:

$$(m, n) \sim (a, b) \iff m + b = a + n.$$

Przykład

Niech $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $\sim$ niech będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ zdefiniowaną następująco:

$$(m, n) \sim (a, b) \iff m + b = a + n.$$

Jest to relacja równoważności.

Przykład

Niech $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $\sim$ niech będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ zdefiniowaną następująco:

$$(m, n) \sim (a, b) \iff m + b = a + n.$$

Jest to relacja równoważności.

Czym jest zbiór ilorazowy?

Przykład

Niech $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $\sim$ niech będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ zdefiniowaną następująco:

$$(m, n) \sim (a, b) \iff m + b = a + n.$$

Jest to relacja równoważności.

Czym jest zbiór ilorazowy?

$$\mathbb{Z}.$$

Szczególna relacja

Relację R w zbiorze $X \times Y$ spełniającą warunki

Szczególna relacja

Relację R w zbiorze $X \times Y$ spełniającą warunki

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\bigwedge_{x\in X} \bigvee_{y\in Y} xRy,$

Szczególna relacja

Relację R w zbiorze $X \times Y$ spełniającą warunki

- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\bigwedge_{x\in X} \bigvee_{y\in Y} xRy,$
- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{y,z\in Y} [xRy \wedge xRz] \Rightarrow (y = z)$

Szczególna relacja

Relację R w zbiorze $X \times Y$ spełniającą warunki

- $\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} xRy$,
- $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y,z \in Y} [xRy \wedge xRz] \Rightarrow (y = z)$

nazywamy **funkcją**.

Szczególna relacja

Relację R w zbiorze $X \times Y$ spełniającą warunki

- $\rightsquigarrow$ $\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} xRy$,
- $\rightsquigarrow$ $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y,z \in Y} [xRy \wedge xRz] \Rightarrow (y = z)$

nazywamy **funkcją**.

Relacje, które są funkcjami, najczęściej oznaczamy przez $f, g, h, \ldots$ zamiast R i piszemy

$$y = f(x)$$

zamiast xfy.

Szczególna relacja

Relację R w zbiorze $X \times Y$ spełniającą warunki

$\rightsquigarrow$ $$\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} xRy,$$

$\rightsquigarrow$ $$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y,z \in Y} [xRy \wedge xRz] \Rightarrow (y = z)$$

nazywamy **funkcją**.

Relacje, które są funkcjami, najczęściej oznaczamy przez $f, g, h, \ldots$ zamiast R i piszemy

$$y = f(x)$$

zamiast xfy.

Funkcja to nie wzór!