Relacje

$= \{ (x, y) : x \in X, y \in Y \}$

Definicja (Relacja)

Dowolny podzbiór zbioru $X \times Y$ nazywamy **relacją dwuargumentową**.

Relacje

Definicja (Relacja)

Dowolny podzbiór zbioru $X \times Y$ nazywamy **relacją dwuargumentową**.

Jeżeli $R \subset X \times Y$ i $(x, y) \in R$, to mówimy, że elementy x i y są ze sobą w relacji R i piszemy xRy.

xRy

Własności relacji

Niech $\boxed{R \subset X \times X}$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

⇝ **zwrotna**, gdy

$$\bigwedge_{x \in X} xRx, \qquad \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} (x, x) \in R$$

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

- **zwrotna**, gdy
$$\bigwedge_{x} xRx,$$
- **symetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow yRx),$$
$$\bigwedge_{x,y} (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

- **zwrotna**, gdy
$$\bigwedge_{x} xRx,$$
- **symetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow yRx),$$
- **antysymetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y,$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) \in R \\ (y,x) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

- **zwrotna**, gdy
$$\bigwedge_{x} xRx,$$
- **symetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow yRx),$$
- **antysymetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y,$$
- **przechodnia**, gdy
$$\bigwedge_{x,y,z} (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz,$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & y \arrow[r, bend left, "R"] & z \end{tikzcd}$$

Własności relacji

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją. Mówimy, że jest ona

- **zwrotna**, gdy
$$\bigwedge_{x} xRx,$$
- **symetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow yRx),$$
- **antysymetryczna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y,$$
- **przechodnia**, gdy
$$\bigwedge_{x,y,z} (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz,$$
- **spójna**, gdy
$$\bigwedge_{x,y} (xRy \vee yRx).$$

Przykład

Niech R będzie relacją w $\mathbb{Z}$ zdefiniowaną następująco

$$xRy \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4|(y-x).$$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \quad 4 \mid y-x\}$$

Przykład

1. $\bigwedge_{x} xRx \equiv \bigwedge_{x} 4 \mid x-x \equiv \bigwedge_{x} 4 \mid 0 \equiv T$

2. $\bigwedge_{x,y} xRy \Rightarrow yRx \equiv \bigwedge_{x,y} 4 \mid y-x \Rightarrow 4 \mid x-y$ $\quad$ T

$y-x=4k$

$x-y=4\cdot(-k)$

Niech R będzie relacją w $\mathbb{Z}$ zdefiniowaną następująco

$$xRy \iff 4|(y-x).$$

$\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} y-x=4k$

1 ✓ $\quad$ 2 ✓ $\quad$ 3 ✗ $\quad$ 4

Czy jest to relacja zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, spójna?

5

3. $\bigwedge_{x,y} \boxed{(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x=y}$

$x=0 \quad x=1 \quad x=1$

$y=4 \quad y=5 \quad y=-7 \quad \ldots$

F

$0R4 \wedge 4R0 \not\Rightarrow 0=4$

$y-x=-(x-y)$

$x-y=-(y-x)=$

$=-4k=4(-k)$

4. $xRy \iff 4 \mid y-x$

$$\bigwedge_{x,y,z} xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \ ?$$

$$\bigwedge_{x,y,z} 4 \mid y-x \wedge 4 \mid z-y \Rightarrow 4 \mid z-x$$

$$\boxed{\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} y-x=4k \qquad \bigvee_{k'\in\mathbb{Z}} z-y=4k'} \qquad \boxed{\bigvee_{k''\in\mathbb{Z}} z-x=4\cdot k''}$$

$y-x=4k$

$z-y=4k'$ $\Rightarrow$ $z-x = z-y+y-x = 4k'+4k =$

$$= \underbrace{4(k'+k)}_{k''} \qquad T$$

k''

$2R6 \qquad 6R(-10)$

$6-2 = 4\cdot 1$ $\leftarrow k$

$-10-6 = 4\cdot(-4)$ $\leftarrow k'$

$-10-2 = -10-6+6-2 =$

$= 4\cdot(-4)+4\cdot 1 = 4(-4+1) = 4\cdot(-3)$

5. $\bigwedge_{x,y} xRy \vee yRx$

$x=0 \qquad \neg(4 \mid 1-0) \qquad \neg(0R1)$

$y=1 \qquad \neg(4 \mid 0-1) \qquad \neg(1R0)$

Przykład

Niech R będzie relacją w $\mathbb{Z}$ zdefiniowaną następująco

$$xRy \iff 4|(y-x).$$

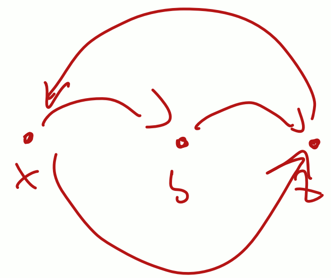
Czy jest to relacja zwrotna, symetryczna, ~~antysymetryczna~~, przechodnia, ~~spójna~~?

Jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Relacje porządku

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją w X.

Relacje porządku

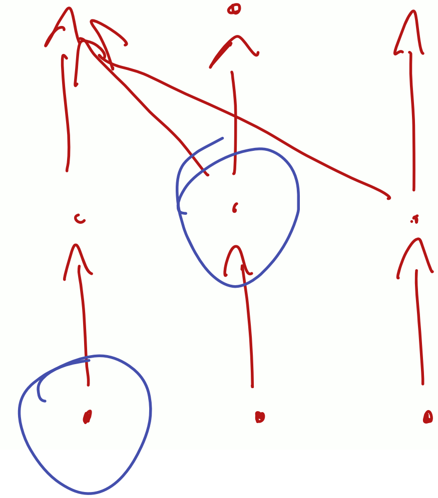


Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją w X.

Definicja (Porządek częściowy)

Jeżeli relacja jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, to nazywamy ją relacją **częściowo porządkującą**, a zbiór X **częściowo uporządkowanym**.

Relacje porządku



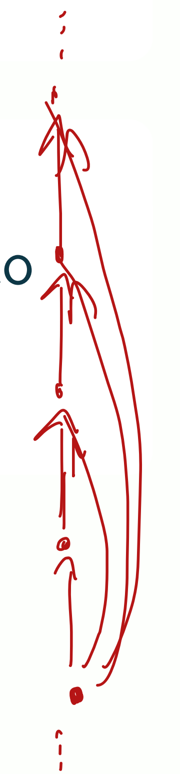
Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją w X.

Definicja (Porządek częściowy)

Jeżeli relacja jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, to nazywamy ją relacją **częściowo porządkującą**, a zbiór X **częściowo uporządkowanym**.

Definicja (Porządek liniowy/całkowity)

Jeżeli relacja jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna, to nazywamy ją relacją **liniowo porządkującą**, a zbiór X **liniowo uporządkowanym**.



Relacje porządku

Jeżeli R jest relacją porządku, to często zamiast xRy piszemy

$$x \prec y.$$

Mówimy w tym przypadku, że x **poprzedza** y lub y **następuje po** x.

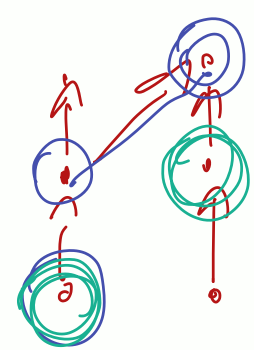
Relacje porządku

Jeżeli R jest relacją porządku, to często zamiast xRy piszemy

$$x \prec y.$$

Mówimy w tym przypadku, że x **poprzedza** y lub y **następuje po** x.

Jeżeli $x \prec y$ lub $y \prec x$ to mówimy, że elementy x i y są **porównywalne**.



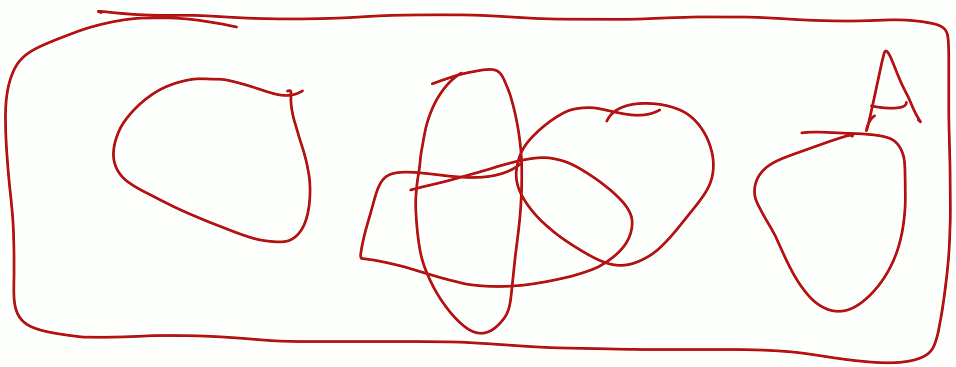
Przykłady

$\neg(x < x)$ nie jest zwrotna!

$<$ NIE jest relacją porządku!

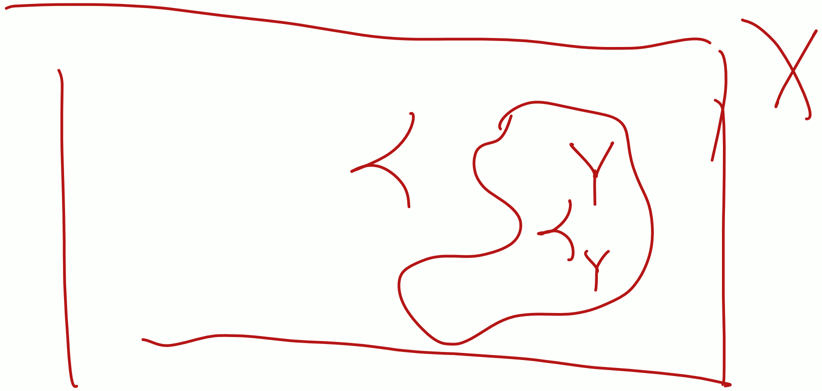
- Relacja $\leqslant$ jest relacją całkowicie porządkującą w $\mathbb{R}$.
- Relacja podzielności $\mid$ jest relacją częściowego porządku w $\mathbb{N}$.
- Relacja inkluzji $\subset$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze potęgowym 2^A ustalonego zbioru A.

$a, b \in \mathbb{N}$ $\quad aRb \equiv a \mid b \equiv$ a jest dzielnikiem b



$XRY \equiv X \subset Y$

Zawężenie porządku



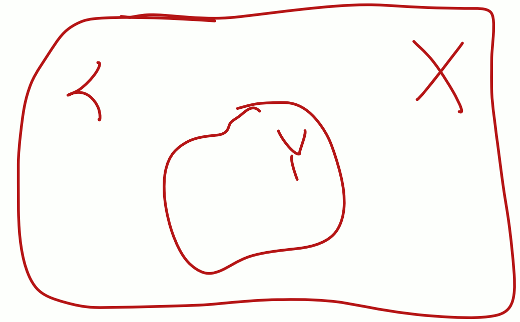
$$(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow (\langle 0,1\rangle, \leq)$$

Jeżeli $\prec$ jest relacją porządku w X oraz $Y \subset X$, to $\prec$ (zawężona do Y) jest również relacją porządku w Y.

$$\prec \subset X \times X$$

$$\prec_Y = \prec \cap (Y \times Y)$$

Elementy wyróżnione



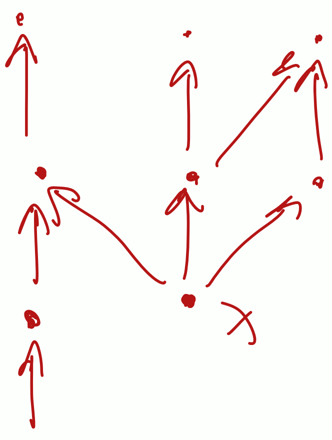
Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

⇝ Element $x \in Y$ nazywamy **elementem maksymalnym** w Y, jeżeli nie poprzedza on żadnego innego elementu zbioru Y, to znaczy

$$\neg \bigvee_{y \in Y} (y \neq x \wedge x \prec y).$$

$$\bigwedge_{y \in Y} \quad x \prec y \Rightarrow y = x$$

⇝ Element $x \in Y$ nazywamy **elementem minimalnym** w Y, jeżeli nie poprzedza go żaden inny element zbioru Y, to znaczy



$$\neg \bigvee_{y \in Y} (y \neq x \wedge y \prec x).$$

Elementy wyróżnione

1

$0,(9) = 0,999\ldots = 9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + \ldots$

$0,(9) - \varepsilon$

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

el. min. el. maksymalny? NIE, bo $1 \notin Y$.

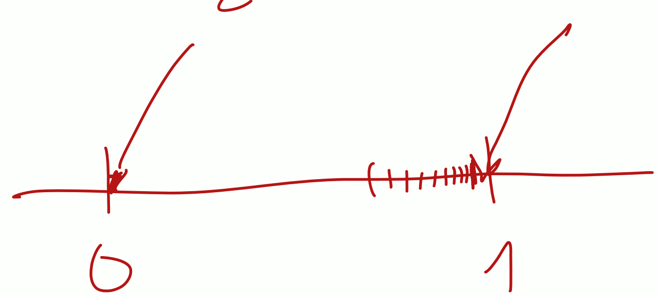
$x = 0,(9) \quad | \cdot 10$

$x = 0,999\ldots \quad | \cdot 10$

$10x = 9,999\ldots = 9 + 0,999\ldots = 9 + x$

$\Rightarrow 9x = 9$

$x = 1$



Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

- $\rightsquigarrow$ Elementem minimalnym Y jest 0.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór Y nie posiada elementu maksymalnego.

$X, Y \qquad X \times Y = \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y\}$

$R \subset X \times Y$

relacja

$R \subset X \times X \qquad \{ Y = X \}$

$(x,y) \in R \equiv x R y$

$(\mathbb{R}, \leq)$

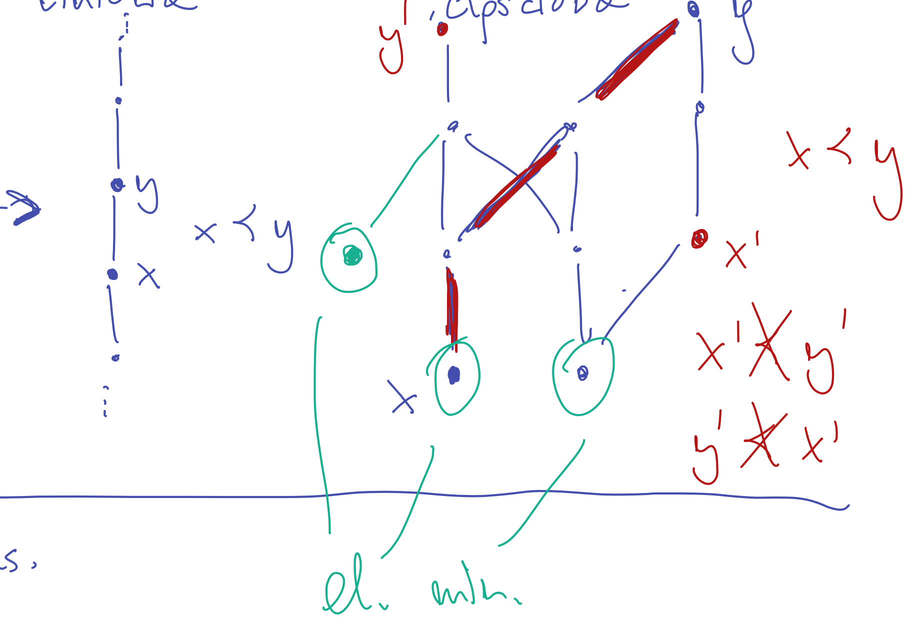
$(\mathbb{N}, |)$

$a | b \Leftrightarrow a$ dzieli b

zw.
sym.
przech.
antysym.
sp.

rel. porządku

liniowe — częściowe



---

el. min. / maks.

x jest min. $\equiv \neg \bigvee_y \; y \preccurlyeq x \wedge y \neq x$

x jest maks. $\equiv \neg \bigvee_y \; x \preccurlyeq y \wedge y \neq x$

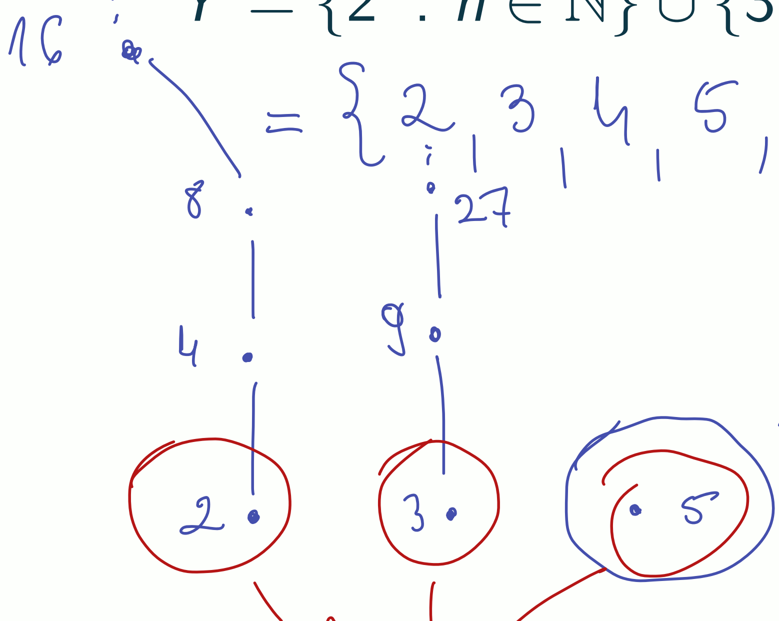
Elements wyróżnione

$(\mathbb{N}, |)$ $\qquad a | b \equiv a$ dzieli b

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 8, 9, 16, 27, 32, \ldots\}$$



el. maks.

el. min.

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $\mid$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

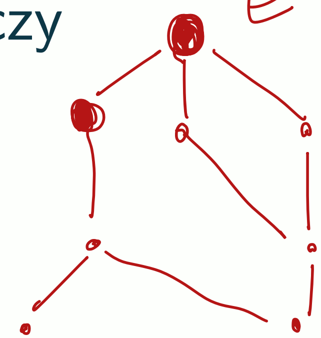
- $\rightsquigarrow$ Elementami minimalnymi Y są 2, 3 i 5.
- $\rightsquigarrow$ Elementem maksymalnym Y jest 5.

Elementy wyróżnione

el. najw.

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

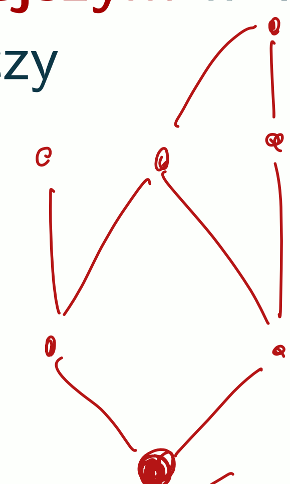
- Element $x \in Y$ nazywamy **elementem największym** w Y, jeżeli następuje po wszystkich elementach zbioru Y, to znaczy



$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

- Element $x \in Y$ nazywamy **elementem najmniejszym** w Y, jeżeli poprzedza wszystkie elementy zbioru Y, to znaczy

$$\bigwedge_{y \in Y} x \prec y.$$



el. najm.

Elementy wyróżnione

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

min. brak maks.

najm. brak najw.

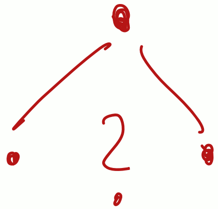
Elementy wyróżnione

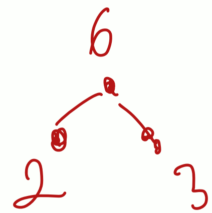
Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

- $\rightsquigarrow$ Elementem najmniejszym Y jest 0.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór Y nie posiada elementu największego.

Elementy wyróżnione





Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

2, 3 – min.

maks. i min.

brak najm.

brak najw.

Elementy wyróżnione

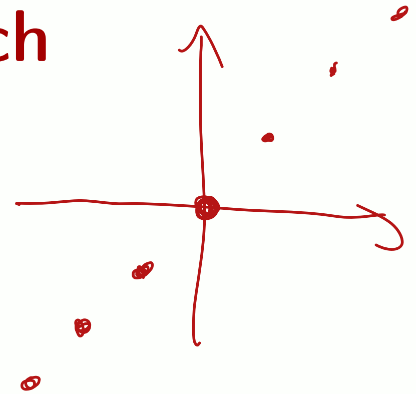
Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

- $\rightsquigarrow$ Zbiór Y nie posiada elementu najmniejszego.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór Y nie posiada elementu największego.

Własności elementów wyróżnionych

$\mathbb{R}$, $\quad R = \{(x, x) : x \in \mathbb{Z}\}$



⇝ W zbiorze uporządkowanym **może istnieć więcej niż jeden** element minimalny i **więcej niż jeden** element maksymalny.

$\ldots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots$

Własności elementów wyróżnionych

- W zbiorze uporządkowanym **może istnieć więcej niż jeden** element minimalny i **więcej niż jeden** element maksymalny.
- W zbiorze uporządkowanym **istnieje co najwyżej jeden** element największy oraz **co najwyżej jeden** element najmniejszy.

$x \prec y$, $\quad y \prec x$?

najw. $\quad$? $\quad$ najw.

$\bigwedge_z z \prec x \qquad \bigwedge_z z \prec y \quad \Rightarrow \quad x = y$

$y \qquad x$

Własności elementów wyróżnionych

- W zbiorze uporządkowanym **może istnieć więcej niż jeden** element minimalny i **więcej niż jeden** element maksymalny.
- W zbiorze uporządkowanym **istnieje co najwyżej jeden** element największy oraz **co najwyżej jeden** element najmniejszy.
- **Jeżeli** w zbiorze uporządkowanym **istnieje** element największy (najmniejszy), to jest on **jedyny** i jest jednocześnie jedynym elementem maksymalnym (minimalnym).

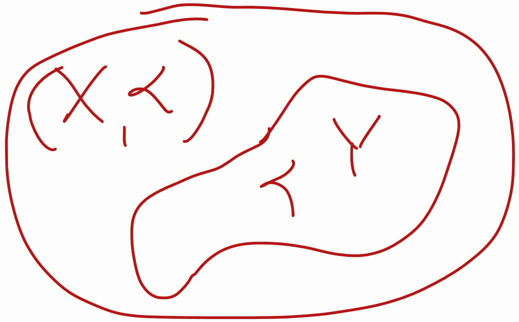
$y \prec x$

$\equiv$

maks. $\left(\neg \bigvee_y x \prec y \wedge y \neq x\right) \equiv \bigwedge_y \overline{\neg(x \prec y)} \vee x = y$

najw. $\bigwedge_y y \prec x$

Kresy zbioru



Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

$\rightsquigarrow$ Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

Kresy zbioru

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

- Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

- Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} x \prec y.$$

Kresy zbioru

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

$\rightsquigarrow$ Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru Y, jeżeli

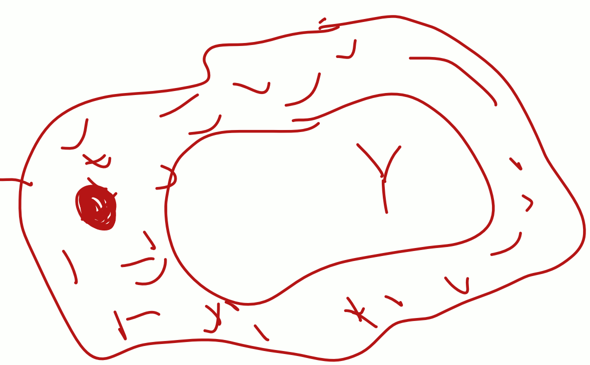
$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

$\rightsquigarrow$ Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} x \prec y.$$

W sensie relacji $\prec$

$\rightsquigarrow$ Jeżeli istnieje **najmniejsze** ograniczenie górne zbioru Y, to nazywamy je **kresem górnym** zbioru Y.



Kresy zbioru

Niech $\prec$ będzie relacją porządku w X oraz $Y \subset X$.

- Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} y \prec x.$$

- Element $x \in X$ nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru Y, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in Y} x \prec y.$$

- Jeżeli istnieje **najmniejsze** ograniczenie górne zbioru Y, to nazywamy je **kresem górnym** zbioru Y.
- Jeżeli istnieje **największe** ograniczenie dolne zbioru Y, to nazywamy je **kresem dolnym** zbioru Y.

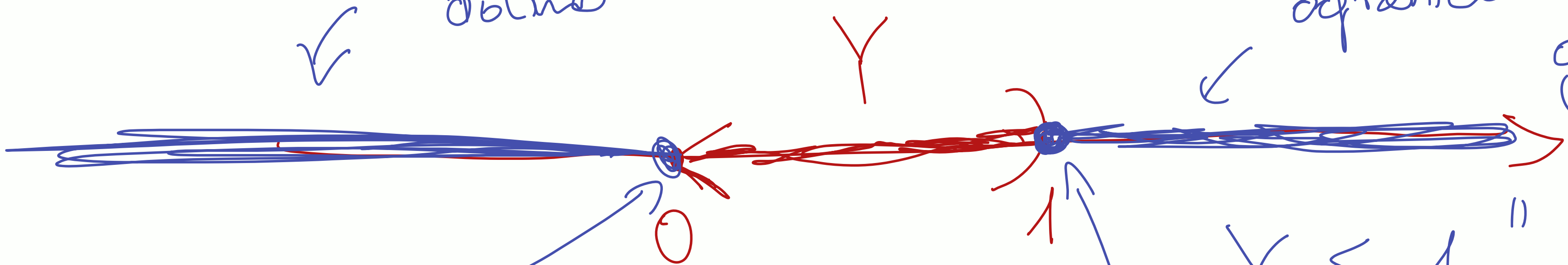
Kresy zbioru

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

ograniczenia dolne

ograniczenia górne



$Y \leq 1$

największe ograniczenie dolne

=

kres dolny

=

kres górne

Kresy zbioru

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$ oraz

$$Y = \langle 0, 1).$$

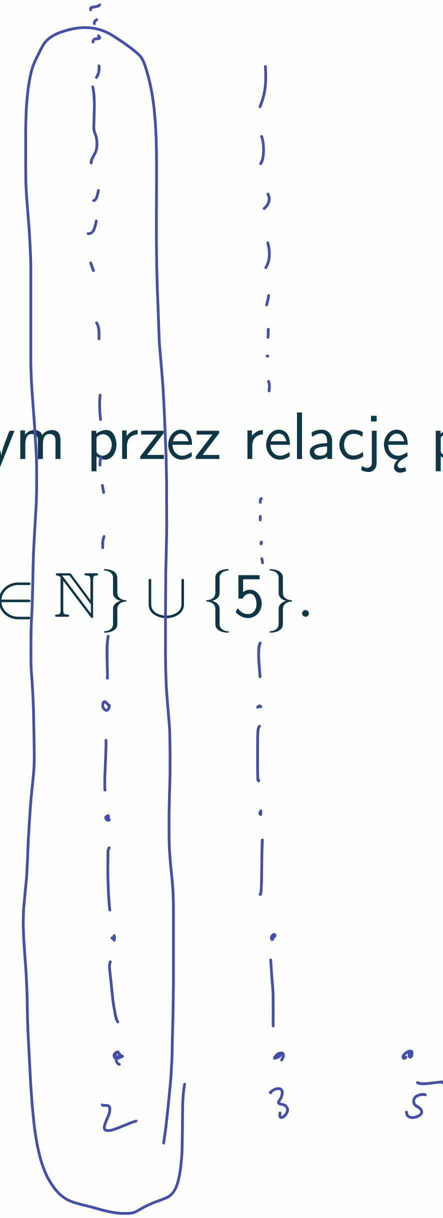
- $\rightsquigarrow$ Zbiorem ograniczeń dolnych Y jest zbiór $(-\infty, 0\rangle$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiorem ograniczeń górnych Y jest zbiór $\langle 1, +\infty)$.
- $\rightsquigarrow$ Kresem dolnym zbioru Y jest 0.
- $\rightsquigarrow$ Kresem górnym zbioru Y jest 1.

Kresy zbioru

$Y \subset \mathbb{N}$

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$



og. dolne $= \{1\}$

$x \in \mathbb{N}$ „$x \mid Y$"

$x = 1$ „$1 \mid Y$"

$1 =$ kres dolny

Y sup Y inf Y

supremum infimum

Kresy zbioru

Niech $X = \mathbb{N}$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności $|$ oraz

$$Y = \{2^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}.$$

- ⇝ Zbiorem ograniczeń dolnych jest $\{1\}$.
- ⇝ Zbiór Y nie ma ograniczeń górnych.
- ⇝ Kresem dolnym zbioru Y jest 1.
- ⇝ Zbiór Y nie ma kresu ~~dolnego~~.

górnego

Własności elementów wyróżnionych

- W niepustym i **skończonym** podzbiorze Y zbioru uporządkowanego $(X, \prec)$ istnieje co najmniej jeden element maksymalny i co najmniej jeden element minimalny.
- Jeżeli w niepustym i **skończonym** podzbiorze Y zbioru uporządkowanego $(X, \prec)$ istnieje dokładnie jeden element maksymalny (minimalny), to jest on jednocześnie elementem największym (najmniejszym) i kresem górnym (dolnym) zbioru Y.

Własności kresów

- Jeżeli w zbiorze uporządkowanym Y istnieje kres górny (dolny), to nie musi on być elementem zbioru Y.

Własności kresów

- Jeżeli w zbiorze uporządkowanym Y istnieje kres górny (dolny), to nie musi on być elementem zbioru Y.
- W dowolnym zbiorze uporządkowanym Y może istnieć co najwyżej jeden kres góry (dolny).

Relacje równoważności

Definicja (Relacja równoważności)

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy **relacją równoważności.**

Relacje równoważności

Definicja (Relacja równoważności)

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy **relacją równoważności.**

Definicja (Klasa abstrakcji)

R

Klasą abstrakcji elementu x względem relacji $\boxed{\sim}$ w X nazywamy zbiór

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

$[x] = \{y \in X : xRy\}$

yRx

Relacje równoważności

Definicja (Relacja równoważności)

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy **relacją równoważności.**

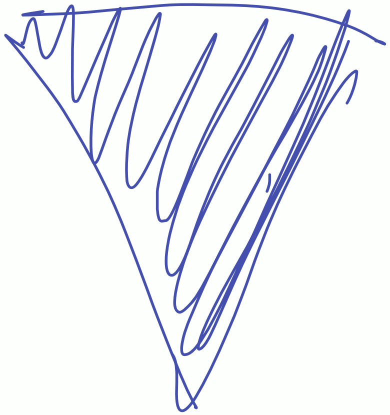
Definicja (Klasa abstrakcji)

Klasą abstrakcji elementu x względem relacji $\sim$ w X nazywamy zbiór

$$[x] := \{y \in X \colon y \sim x\}.$$

Zbiór wszystkich klas abstrakcji nazywamy **zbiorem ilorazowym** i oznaczamy $(X/\sim)$.

Relacje równoważności



Niech $X = \mathbb{Z}$, a relacja $\sim$ będzie zdefiniowana jako

$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3|(a-b).$$

Na przykład

$$1 \sim 10, \qquad -3 \sim 0, \qquad 11 \sim 2.$$

$10 - 1 = 9 = 3 \cdot 3 \qquad 0 - (-3) = 3 \qquad 2 - 11 = -9 = 3 \cdot (-3)$

Relacje równowazności

$[1] = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$

Niech $X = \mathbb{Z}$, a relacja $\sim$ będzie zdefiniowana jako

$10 - 10 = 0$

$$a \sim b \iff 3 | (a - b).$$

$10 \sim 10$

Na przykład

$$1 \sim 10, \qquad -3 \sim 0, \qquad 11 \sim 2.$$

$[5]$, $[13]$

$[-15]$ ...

Jest to relacja równoważności.

$[a] = \{b \in \mathbb{Z} : a \sim b\}$

$10 \in [1]$

$1 \in [10]$

$[1] = [10]$?

c

$3 | c - 1 = c - (10 - 9)$

$= c - 10 + 9$

Relacje równoważności

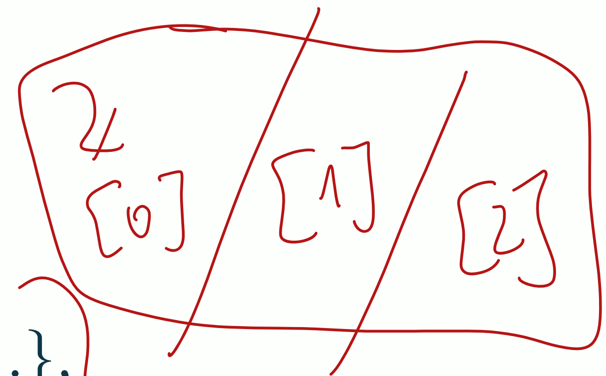
Niech $X = \mathbb{Z}$, a relacja $\sim$ będzie zdefiniowana jako

$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3|(a-b).$$

Na przykład

$$1 \sim 10, \qquad -3 \sim 0, \qquad 11 \sim 2.$$

Jest to relacja równoważności.



Klasami abstrakcji są zbiory

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\},$$
$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, \cancel{5}\,7, \dots\},$$
$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.$$

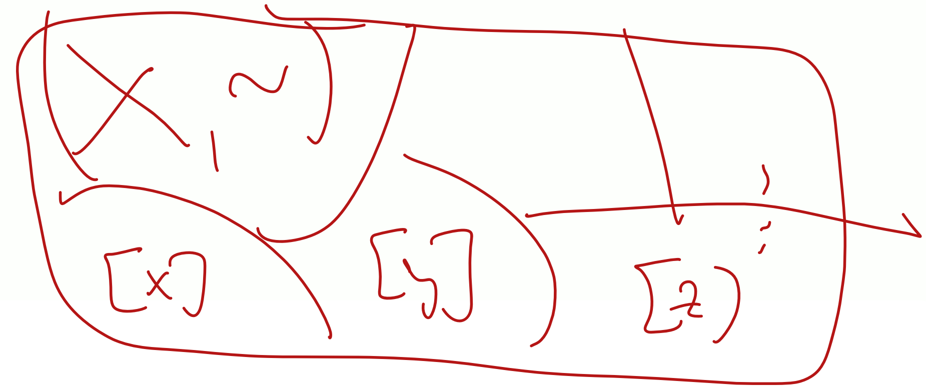
$[-5] = [10]$

$\mathbb{Z}_3$

$[8]$

$\underset{2}{[5]} + \underset{2}{[8]} = \underset{1}{[13]}$

Zasada abstrakcji



Twierdzenie (Zasada abstrakcji)

Jeżeli $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze X, to

- ⇝ *wszystkie klasy abstrakcji są niepuste,* $x \in [x]$
- ⇝ *każdy element $x \in X$ należy do pewnej klasy abstrakcji,* $x \in [x]$
- ⇝ *dwie klasy abstrakcji są albo równe, albo nie mają elementów wspólnych.*

$\longleftarrow$ $[0] \cap [1] = \emptyset$

d. Hassego