Zasada indukcji matematycznej

$(n+1)^2$

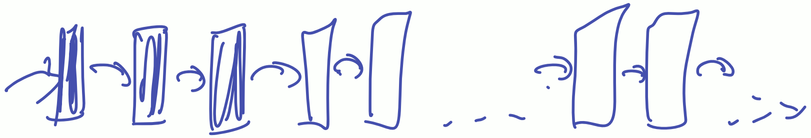
Załóżmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ chcemy wykazać, że spełnione jest pewne zdanie $p(n)$.

$p(n) \equiv n^2+2n+1$ jest podzielne przez $n+1$

$n \in \mathbb{N}$

?

$\underbrace{p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge \ldots \wedge p(n)} \wedge \ldots \text{"} p(\infty) \text{"}$



Zasada indukcji matematycznej

Załóżmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ chcemy wykazać, że spełnione jest pewne zdanie $p(n)$.

Twierdzenie (Zasada indukcji)

Załóżmy, że

1. *zdanie $p(1)$ jest prawdziwe,*
2. *dla każdego $n \in \mathbb{N}$ z prawdziwości $p(n)$ wynika prawdziwość $p(n+1)$.*

Wtedy zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \boxed{\boxed{p(n)} \Rightarrow p(n+1)}$$

Zasada indukcji matematycznej

Twierdzenie (Zasada indukcji)

Załóżmy, że

1. $p(1)$,
2. $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [p(n) \Rightarrow p(n+1)]$.

Wtedy

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p(n).$$

Zasada indukcji matematycznej

Twierdzenie (Zasada indukcji)

Załóżmy, że

1. $p(1)$,
2. $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [p(n) \Rightarrow p(n+1)]$.

Wtedy

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p(n).$$

Punkt 1. nazywamy **pierwszym krokiem indukcyjnym**, a punkt 2. **drugim krokiem indukcyjnym.**

Przykład 1

Zadanie

Wykazać, że

L P

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad p(n)$$

dla dowolnej liczby naturalnej n.

1. $p(1)$? $n=1$ $L=1$ $P=\frac{1(1+1)}{2}=1$ $L=P$

2. $\bigwedge_{n\in N} p(n) \Rightarrow p(n+1)$

~~Niech $n \in \mathbb{N}$.~~

Z $p(n)$ jest prawdziwe $\quad 1+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

T $p(n+1)$ — " — $\quad 1+2+\ldots+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\boxed{1+2+\ldots+n}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$Z \Rightarrow T$

Przykład 1

Zadanie

Wykazać, że

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad p(n)$$

dla dowolnej liczby naturalnej n.

Sprawdzamy warunek początkowy: dla $n = 1$ równość przyjmuje postać

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

a zatem jest prawdziwa.

Przykład 1

Wykonujemy krok indukcyjny: załóżmy, że dla ustalonej (wybranej dowolnie) liczby naturalnej n, powyższa równość zachodzi (to znaczy zdanie $p(n)$ jest prawdziwe). Wtedy

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \;=\; (1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$$

Przykład 1

Wykonujemy krok indukcyjny: załóżmy, że dla ustalonej (wybranej dowolnie) liczby naturalnej n, powyższa równość zachodzi (to znaczy zdanie $p(n)$ jest prawdziwe). Wtedy

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+n+1 = \\ &\overset{p(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1 \end{aligned}$$

Przykład 1

Wykonujemy krok indukcyjny: załóżmy, że dla ustalonej (wybranej dowolnie) liczby naturalnej n, powyższa równość zachodzi (to znaczy zdanie $p(n)$ jest prawdziwe). Wtedy

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+n+1 = \\ &\overset{p(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Przykład 1

Wykonujemy krok indukcyjny: załóżmy, że dla ustalonej (wybranej dowolnie) liczby naturalnej n, powyższa równość zachodzi (to znaczy zdanie $p(n)$ jest prawdziwe). Wtedy

$$
\begin{aligned}
1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+n+1= \\
&\overset{p(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1= \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}= \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}
$$

Przykład 1

Wykonujemy krok indukcyjny: załóżmy, że dla ustalonej (wybranej dowolnie) liczby naturalnej n, powyższa równość zachodzi (to znaczy zdanie $p(n)$ jest prawdziwe). Wtedy

$$\underbrace{1+2+\cdots+n+(n+1)} = (1+2+\cdots+n)+n+1 =$$

$$\stackrel{p(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1 =$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\sum_{k=1}^{n} k$

$=$

$1+2+\ldots+n$

Otrzymana równość jest identyczna ze zdaniem $p(n+1)$, co kończy dowód.

Ważne oznaczenia

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \stackrel{\text{def}}{\equiv} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \stackrel{\text{def}}{\equiv} a_1 a_2 \ldots a_n$$

Przykład 2

$x \in \langle -1, 1 \rangle$?

Nierówność Bernoulliego

Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$x \in \langle -1, +\infty)$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx. \qquad p(n)$$

1. $n = 1$: $p(1) \equiv (1+x)^1 \overset{?}{\geqslant} 1 + 1 \cdot x$

$1 + x \geqslant 1 + x$ ✓ $\quad x \geqslant -1$

2. $n \in \mathbb{N}$ Z $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

T $(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geqslant} 1 + (n+1)x$

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{Z}{\geqslant} (1+nx)(1+x) =$

$= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geqslant 0}$

$\geqslant 1 + (n+1)x$

Przykład 2

Nierówność Bernoulliego

Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx. \qquad p(n)$$

Dla $n = 1$ nierówność przyjmuje postać

$$1+x \geqslant 1+x,$$

więc jest oczywiście spełniona.

Przykład 2

Załóżmy teraz, że nierówność zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x)$$

Przykład 2

Załóżmy teraz, że nierówność zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{p(n)}{\geqslant} (1+nx)(1+x)$$

Przykład 2

Załóżmy teraz, że nierówność zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) &\overset{p(n)}{\geqslant} (1+nx)(1+x)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\end{aligned}$$

Przykład 2

Załóżmy teraz, że nierówność zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{p(n)}{\geqslant} (1+nx)(1+x)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

Przykład 2

Załóżmy teraz, że nierówność zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{p(n)}{\geqslant} (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

zatem $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, co kończy dowód.

Przykład 2

Załóżmy teraz, że nierówność zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{p(n)}{\geqslant} (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

zatem $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, co kończy dowód.

Gdzie użyliśmy założenia $x \geqslant -1$?

Inne wersje indukcji

$p(n_0)$, $p(n_0+1)$, ...

Twierdzenie (Zasada indukcji)

Załóżmy, że n_0 *jest liczbą całkowitą oraz*

1. $p(n_0)$,
2. $\bigwedge_{n \geqslant n_0} [p(n) \Rightarrow p(n+1)]$.

Wtedy

$$\bigwedge_{n \geqslant n_0} p(n).$$

Inne wersje indukcji

Twierdzenie (Zasada indukcji zupełnej)

Załóżmy, że

1. $p(1)$,

2

2. $\displaystyle \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ \boxed{\Big[\bigwedge_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} p(k)\Big]} \Rightarrow p(n+1)\Big\}.$

2

$$\Big\{ \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \Big(\boxed{p(n)} \Rightarrow p(n+1)\Big)$$

Wtedy

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p(n).$$

Inne wersje indukcji

Twierdzenie (Zasada indukcji zupełnej)

Załóżmy, że n_0 *jest liczbą całkowitą oraz*

1. $p(n_0)$,
2. $\bigwedge_{n \geqslant n_0} \{[\bigwedge_{k \in \{n_0, n_0+1, \ldots, n\}} p(k)] \Rightarrow p(n+1)\}$.

Wtedy

$$\bigwedge_{n \geqslant n_0} p(n).$$

Przykład 3

$p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge p(4) \wedge p(5)$

$a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 9$,

$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 17$, $a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 33$

$$\boxed{p(n) \equiv a_n = 1 + 2^n, \quad n \in \mathbb{N}}$$

Rozważmy ciąg określony następująco: $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ oraz

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $n \geq 2$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Znajdź jawny wzór na a_n dla $n \in \mathbb{N}$.

Z $\bigwedge_{k \in \{1,2,\dots,n\}} p(k) \equiv \bigwedge_{k \in \{1,2,\dots,n\}} a_k = 1 + 2^k$

$k = n$, $k = n-1$

T $p(n+1) \equiv a_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \overset{Z}{=} 3 \cdot (1 + 2^n) - 2(1 + 2^{n-1}) =$$

$$= 3 + 3 \cdot 2^n - 2 - 2 \cdot 2^{n-1} = 1 + 3 \cdot 2^n - 2^n =$$

$$= 1 + 2 \cdot 2^n = 1 + 2^{n+1}.$$

Przykład 4

Wykazać, że każda nieujemna liczba całkowita ma rozwinięcie binarne,

Przykład 4

$(1011)_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 11$

1. $p(0)$: $0 = (0)_2 = 0\cdot 2^0 = 0$

Wykazać, że każda nieujemna liczba całkowita ma rozwinięcie binarne, to znaczy dla każdego $n \geqslant 0$ istnieją $r \geqslant 0$ oraz takie liczby $c_0, c_1, \ldots, c_r$ ze zbioru $\{0, 1\}$, że

$p(0), p(1), p(2), \ldots$

$$n = (c_r c_{r-1} c_{r-2} \ldots c_1 c_0)_2 = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \cdots + c_1 2^1 + c_0 2^0.$$

2. $n \geqslant 0$. (Z) $\bigwedge_{k\in\{0,1,\ldots,n\}} p(k) \equiv$ każda liczba $\leq n$ ma rozwinięcie binarne

(T) $p(n+1) \equiv n+1$ ma rozw. bin.

(I) $n+1$ jest parzyste $\Rightarrow \bigvee_{m\geqslant 0} n+1 = 2m$, wtedy $m \leq n$.

$\overset{(Z)}{\Rightarrow} m = (c_r \ldots c_1 c_0)_2$. Stąd $n+1 = (c_r \ldots c_1 c_0 0)_2 =$
$= 2\cdot(c_r\cdot 2^r + \ldots + c_1\cdot 2^1 + c_0\cdot 2^0) =$
$= 2m$.

(II) $n+1$ jest nieparzyste $\Rightarrow$
n jest parzyste $\overset{(Z)}{\Rightarrow} n = (c_r \ldots c_1 0)_2$ | $n+1 = (c_r \ldots c_1 1)_2$

Przykład 4

Wykazać, że każda nieujemna liczba całkowita ma rozwinięcie binarne, to znaczy dla każdego $n \geqslant 0$ istnieją $r \geqslant 0$ oraz takie liczby $c_0, c_1, \ldots, c_r$ ze zbioru $\{0, 1\}$, że

$$n = (c_r c_{r-1} c_{r-2} \ldots c_1 c_0)_2 = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \cdots + c_1 2^1 + c_0 2^0.$$

Liczba $n = 0$ ma rozwinięcie dwójkowe

$$0 = (0)_2.$$

Przykład 4

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Załóżmy, że każda liczba mniejsza lub równa n ma rozwinięcie binarne.

Przykład 4

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Załóżmy, że każda liczba mniejsza lub równa n ma rozwinięcie binarne.

- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że liczba $n+1$ jest parzysta, to znaczy $n+1=2m$ dla pewnego $m \geqslant 0$.

Przykład 4

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Załóżmy, że każda liczba mniejsza lub równa n ma rozwinięcie binarne.

- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że liczba $n+1$ jest parzysta, to znaczy $n+1 = 2m$ dla pewnego $m \geqslant 0$. Ponieważ $m \leqslant n$, więc m ma rozwinięcie

$$m = (c_r \dots c_1 c_0)_2.$$

Przykład 4

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Załóżmy, że każda liczba mniejsza lub równa n ma rozwinięcie binarne.

$\rightsquigarrow$ Załóżmy, że liczba $n+1$ jest parzysta, to znaczy $n+1=2m$ dla pewnego $m \geqslant 0$. Ponieważ $m \leqslant n$, więc m ma rozwinięcie

$$m = (c_r \dots c_1 c_0)_2.$$

Wtedy

$$n+1 = 2m = (c_r \dots c_1 c_0 0)_2,$$

więc $n+1$ ma rozwinięcie binarne.

Przykład 4

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Załóżmy, że każda liczba mniejsza lub równa n ma rozwinięcie binarne.

- Załóżmy, że liczba $n+1$ jest parzysta, to znaczy $n+1=2m$ dla pewnego $m \geqslant 0$. Ponieważ $m \leqslant n$, więc m ma rozwinięcie

  $$m = (c_r \dots c_1 c_0)_2.$$

  Wtedy

  $$n+1 = 2m = (c_r \dots c_1 c_0 0)_2,$$

  więc $n+1$ ma rozwinięcie binarne.
- Jeżeli $n+1$ jest liczbą nieparzystą, to n jest liczbą parzystą

Przykład 4

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Załóżmy, że każda liczba mniejsza lub równa n ma rozwinięcie binarne.

- Załóżmy, że liczba $n+1$ jest parzysta, to znaczy $n+1 = 2m$ dla pewnego $m \geqslant 0$. Ponieważ $m \leqslant n$, więc m ma rozwinięcie

$$m = (c_r \dots c_1 c_0)_2.$$

  Wtedy

$$n+1 = 2m = (c_r \dots c_1 c_0 0)_2,$$

  więc $n+1$ ma rozwinięcie binarne.
- Jeżeli $n+1$ jest liczbą nieparzystą, to n jest liczbą parzystą i ma rozwinięcie

$$n = (c_r \dots c_1 0)_2,$$

Przykład 4

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Załóżmy, że każda liczba mniejsza lub równa n ma rozwinięcie binarne.

- Załóżmy, że liczba $n+1$ jest parzysta, to znaczy $n+1 = 2m$ dla pewnego $m \geqslant 0$. Ponieważ $m \leqslant n$, więc m ma rozwinięcie

  $$m = (c_r \dots c_1 c_0)_2.$$

  Wtedy

  $$n+1 = 2m = (c_r \dots c_1 c_0 0)_2,$$

  więc $n+1$ ma rozwinięcie binarne.
- Jeżeli $n+1$ jest liczbą nieparzystą, to n jest liczbą parzystą i ma rozwinięcie

  $$n = (c_r \dots c_1 0)_2,$$

  więc

  $$n+1 = (c_r \dots c_1 1)_2.$$

Indukcja skończona

Wszystkie omówione zasady indukcji mają swoje odpowiedniki skończone.

Twierdzenie (Zasada indukcji skończonej)

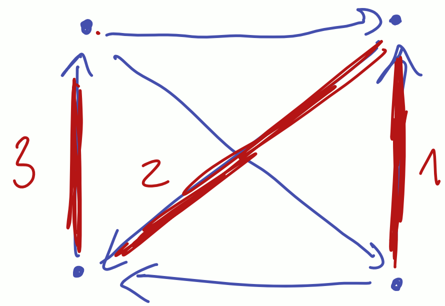
Niech $n \geqslant 1$ i załóżmy, że

1. $p(1)$,
2. $\bigwedge_{k \in \{1,2,\ldots,n-1\}} [p(k) \Rightarrow p(k+1)]$.

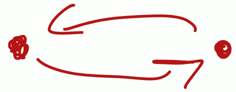
Wtedy

$$\bigwedge_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} p(k).$$

Przykład 5

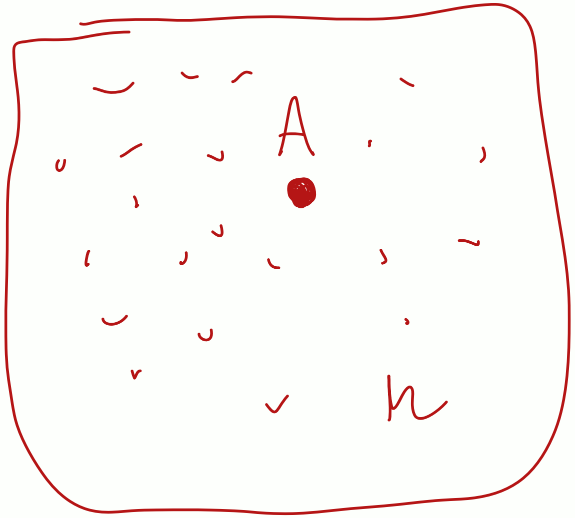


1. $p(1)$ $\bullet$, $p(2)$

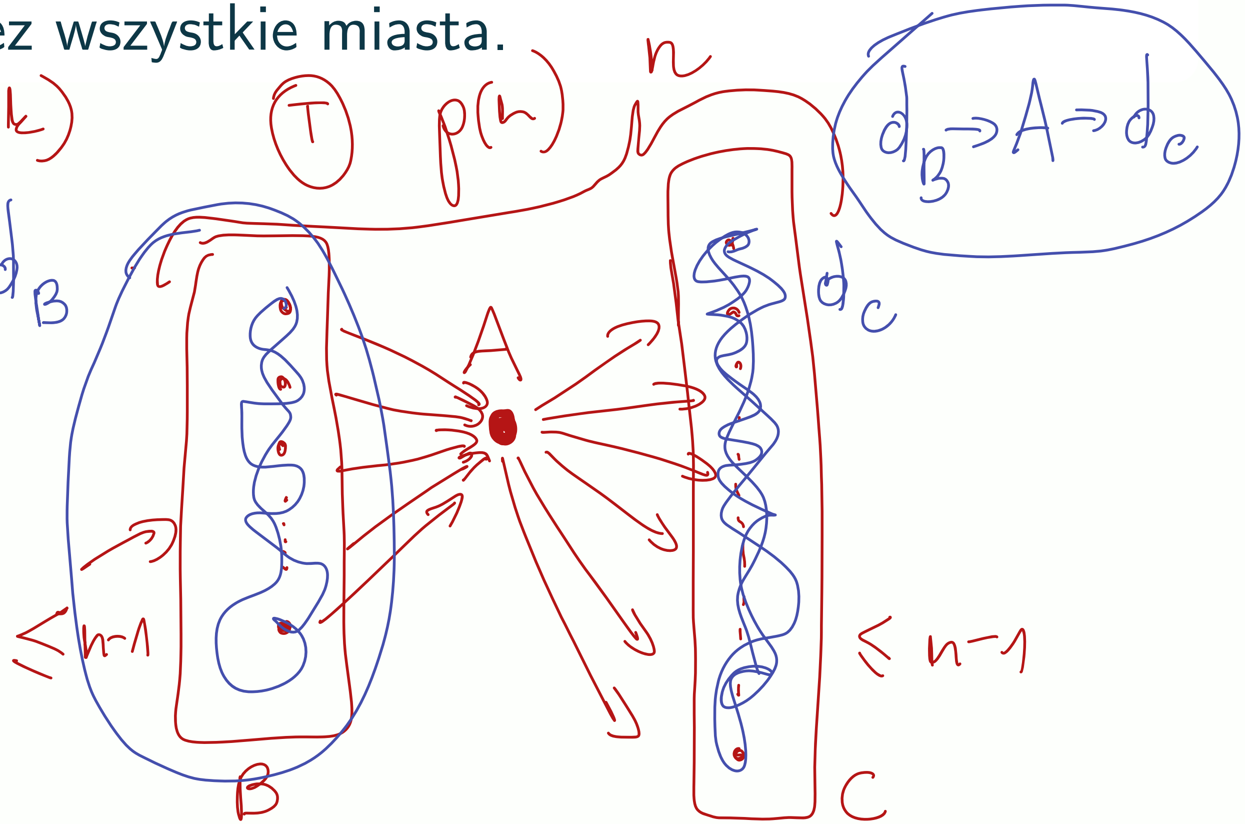


Załóżmy, że w pewnym państwie jest $n \geqslant 1$ miast i każda para miast jest połączona jedną drogą jednokierunkową. Uzasadnić, że istnieje pewna droga, która przechodzi przez wszystkie miasta.

2. Z $\bigwedge_{k \in \{1,2,\dots,n-1\}} p(k)$ T $p(n)$



$\approx$



Przykład 5

Załóżmy, że w pewnym państwie jest $n \geqslant 1$ miast i każda para miast jest połączona jedną drogą jednokierunkową. Uzasadnić, że istnieje pewna droga, która przechodzi przez wszystkie miasta.

Dla $n = 1$ teza jest oczywista.

Przykład 5

Niech $k \leqslant n - 1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że w każdym zbiorze co najwyżej k miast istnieje droga, która przechodzi przez te k miast (i nie przechodzi przez inne miasta).

Przykład 5

Niech $k \leqslant n - 1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że w każdym zbiorze co najwyżej k miast istnieje droga, która przechodzi przez te k miast (i nie przechodzi przez inne miasta). Wybierzmy dowolne $k + 1$ miast w tym państwie i oznaczmy jedno z nich przez A.

Przykład 5

Niech $k \leqslant n-1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że w każdym zbiorze co najwyżej k miast istnieje droga, która przechodzi przez te k miast (i nie przechodzi przez inne miasta). Wybierzmy dowolne $k+1$ miast w tym państwie i oznaczmy jedno z nich przez A.

$\leadsto$ Niech B będzie zbiorem tych miast (spośród $k+1$ wybranych), z których prowadzi droga do A.

Przykład 5

Niech $k \leqslant n-1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że w każdym zbiorze co najwyżej k miast istnieje droga, która przechodzi przez te k miast (i nie przechodzi przez inne miasta). Wybierzmy dowolne $k+1$ miast w tym państwie i oznaczmy jedno z nich przez A.

- $\leadsto$ Niech B będzie zbiorem tych miast (spośród $k+1$ wybranych), z których prowadzi droga do A.
- $\leadsto$ Niech C będzie zbiorem tych miast (spośród $k+1$ wybranych), do których prowadzi droga z A.

Przykład 5

Niech $k \leqslant n-1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że w każdym zbiorze co najwyżej k miast istnieje droga, która przechodzi przez te k miast (i nie przechodzi przez inne miasta). Wybierzmy dowolne $k+1$ miast w tym państwie i oznaczmy jedno z nich przez A.

- $\rightsquigarrow$ Niech B będzie zbiorem tych miast (spośród $k+1$ wybranych), z których prowadzi droga do A.
- $\rightsquigarrow$ Niech C będzie zbiorem tych miast (spośród $k+1$ wybranych), do których prowadzi droga z A.

Z założenia indukcyjnego istniej droga d_B w zbiorze B, która przechodzi przez wszystkie miasta.

Przykład 5

Niech $k \leqslant n - 1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że w każdym zbiorze co najwyżej k miast istnieje droga, która przechodzi przez te k miast (i nie przechodzi przez inne miasta). Wybierzmy dowolne $k + 1$ miast w tym państwie i oznaczmy jedno z nich przez A.

- $\rightsquigarrow$ Niech B będzie zbiorem tych miast (spośród $k + 1$ wybranych), z których prowadzi droga do A.
- $\rightsquigarrow$ Niech C będzie zbiorem tych miast (spośród $k + 1$ wybranych), do których prowadzi droga z A.

Z założenia indukcyjnego istniej droga d_B w zbiorze B, która przechodzi przez wszystkie miasta. Analogicznie istnieje droga d_C w C, która przechodzi przez wszystkie miasta.

Przykład 5

Niech $k \leqslant n - 1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że w każdym zbiorze co najwyżej k miast istnieje droga, która przechodzi przez te k miast (i nie przechodzi przez inne miasta). Wybierzmy dowolne $k + 1$ miast w tym państwie i oznaczmy jedno z nich przez A.

- $\rightsquigarrow$ Niech B będzie zbiorem tych miast (spośród $k + 1$ wybranych), z których prowadzi droga do A.
- $\rightsquigarrow$ Niech C będzie zbiorem tych miast (spośród $k + 1$ wybranych), do których prowadzi droga z A.

Z założenia indukcyjnego istniej droga d_B w zbiorze B, która przechodzi przez wszystkie miasta. Analogicznie istnieje droga d_C w C, która przechodzi przez wszystkie miasta. Tworzymy teraz nową drogą $d_B \to A \to d_C$, która przechodzi przez wszystkie miasta.

Przykład 6

Rozważmy następującą grę dwuosobową. Przed graczami A i B leży prostokątna tabliczka czekolady wymiaru $n \times k$ (ma $n \cdot k$ kostek), przy czym $n, k \geqslant 1$. Gracz A łamie tabliczkę w dowolny sposób na dwie prostokątne części („pionowo" lub „poziomo", wzdłuż krawędzi kostek). Następnie wybraną przez siebie część zjada, a drugą przekazuje graczowi B, który robi to samo co gracz A: dzieli tabliczkę na dwie części, jedną zjada, drugą przekazuje graczowi A. Gracze wykonują te czynności, dopóki jeden z nich nie otrzyma kostki wymiaru 1×1 – gracz ten przegrywa i gra się kończy.

Który z graczy wygra?

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dla $n = 1$ teza zachodzi w sposób oczywisty.

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dla $n = 1$ teza zachodzi w sposób oczywisty.

Załóżmy, że dla ustalonego n w dowolnym zbiorze n kotów wszystkie są tego samego koloru.

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dla $n = 1$ teza zachodzi w sposób oczywisty.

Załóżmy, że dla ustalonego n w dowolnym zbiorze n kotów wszystkie są tego samego koloru. Rozważmy teraz dowolny zbiór $n + 1$ kotów k_1, k_2, $\ldots$, k_n, k_{n+1}.

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dla $n = 1$ teza zachodzi w sposób oczywisty.

Załóżmy, że dla ustalonego n w dowolnym zbiorze n kotów wszystkie są tego samego koloru. Rozważmy teraz dowolny zbiór $n + 1$ kotów k_1, k_2, $\ldots$, k_n, k_{n+1}. Na mocy założenia, wszystkie koty k_1, $\ldots$, k_n są tego samego koloru.

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dla $n = 1$ teza zachodzi w sposób oczywisty.

Załóżmy, że dla ustalonego n w dowolnym zbiorze n kotów wszystkie są tego samego koloru. Rozważmy teraz dowolny zbiór $n + 1$ kotów k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}. Na mocy założenia, wszystkie koty k_1, ..., k_n są tego samego koloru. Podobnie wszystkie koty k_2, ..., k_{n+1} są tego samego koloru.

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dla $n = 1$ teza zachodzi w sposób oczywisty.

Załóżmy, że dla ustalonego n w dowolnym zbiorze n kotów wszystkie są tego samego koloru. Rozważmy teraz dowolny zbiór $n + 1$ kotów k_1, k_2, . . . , k_n, k_{n+1}. Na mocy założenia, wszystkie koty k_1, . . . , k_n są tego samego koloru. Podobnie wszystkie koty k_2, . . . , k_{n+1} są tego samego koloru. Zatem

$$\underbrace{k_1, k_2, \ldots, k_n}_{\text{ten sam kolor}}, k_{n+1} \qquad k_1, \underbrace{k_2, \ldots, k_{n+1}}_{\text{ten sam kolor}},$$

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dla $n = 1$ teza zachodzi w sposób oczywisty.

Załóżmy, że dla ustalonego n w dowolnym zbiorze n kotów wszystkie są tego samego koloru. Rozważmy teraz dowolny zbiór $n + 1$ kotów k_1, k_2, $\ldots$, k_n, k_{n+1}. Na mocy założenia, wszystkie koty k_1, $\ldots$, k_n są tego samego koloru. Podobnie wszystkie koty k_2, $\ldots$, k_{n+1} są tego samego koloru. Zatem

$$\underbrace{k_1, k_2, \ldots, k_n}_{\text{ten sam kolor}}, k_{n+1} \qquad k_1, \underbrace{k_2, \ldots, k_{n+1}}_{\text{ten sam kolor}},$$

co dowodzi, że w dowolnym zbiorze $n + 1$ kotów, wszystkie są tego samego koloru.

Przykład 7

Wykazać, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dla $n = 1$ teza zachodzi w sposób oczywisty.

Załóżmy, że dla ustalonego n w dowolnym zbiorze n kotów wszystkie są tego samego koloru. Rozważmy teraz dowolny zbiór $n + 1$ kotów k_1, k_2, $\dots$, k_n, k_{n+1}. Na mocy założenia, wszystkie koty k_1, $\dots$, k_n są tego samego koloru. Podobnie wszystkie koty k_2, $\dots$, k_{n+1} są tego samego koloru. Zatem

$$\underbrace{k_1, k_2, \dots, k_n}_{\text{ten sam kolor}}, k_{n+1} \qquad k_1, \underbrace{k_2, \dots, k_{n+1}}_{\text{ten sam kolor}},$$

co dowodzi, że w dowolnym zbiorze $n + 1$ kotów, wszystkie są tego samego koloru.

Gdzie jest błąd?

Przykład 7

Nie wykazaliśmy, że prawdziwa jest implikacja

$$p(1) \Rightarrow p(2).$$

Przykład 7

Nie wykazaliśmy, że prawdziwa jest implikacja

$$p(1) \Rightarrow p(2).$$

Dla $n = 1$ nie ma elementu wspólnego k_2.