Matematyka dyskretna

Teoria mnogości

Adam Gregosiewicz

20 października 2022 r.

Podstawowe pojęcia

- Zbiór ($A, B, C, \ldots$).
- Zbiór pusty $\emptyset$.
- Elementy zbioru ($a, b, c, \ldots$).
- Należenie do zbioru ($a \in A$).

Konstruktory zbiorów

Fakt, że zbiór A w pewnym uniwersum X skład się z elementów, dla których prawdziwa jest funkcja zdaniowa $\phi(x)$ zapisujemy w postaci

$$A = \{x \in X \colon \phi(x)\}.$$

Relacje między zbiorami

- Inkluzja (zawieranie)

$$A \subset B \iff \bigwedge_{x \in X} (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Czytamy: A jest **podzbiorem** B (lub B jest **nadzbiorem** A).
Czasami zamiast $\subset$ piszemy $\subseteq$.

- Równość

$$A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A)$$

lub

$$A = B \iff \bigwedge_{x \in X} (x \in A \iff x \in B).$$

Dopełnienie zbioru

Dopełnieniem zbioru A (w uniwersum X) nazywamy zbiór

$$A^c = \{x \in X \colon x \notin A\},$$

w którym zdanie $x \notin A$ oznacza $\neg(x \in A)$.

Czasami zamiast A^c piszemy $\bar{A}$.

Zbiór potęgowy

Zbiorem potęgowym 2^A zbioru A nazywamy zbiór złożony ze wszystkich podzbiorów zbioru A, to znaczy

$$2^A := \{B\colon B \subset A\}.$$

Jeżeli zbiór A jest skończony i ma n elementów, to jego zbiór potęgowy 2^A ma 2^n elementów.

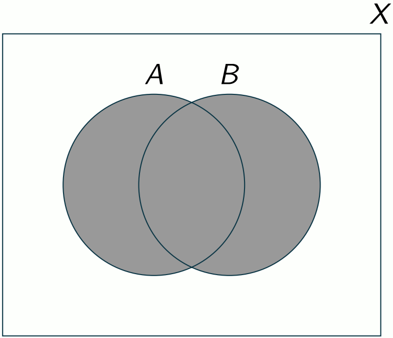
Przykładowe zbiory

- Zbiór liczb naturalnych
$$\mathbb{N} \coloneqq \{1, 2, \ldots\}.$$
- Zbiór liczb całkowitych
$$\mathbb{Z} \coloneqq \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$
- Zbiór liczb wymiernych
$$\mathbb{Q} \coloneqq \left\{\frac{p}{q} \colon p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}.$$
- Zbiór liczb rzeczywistych
$$\mathbb{R}.$$

Operacje na zbiorach

- Suma zbiorów

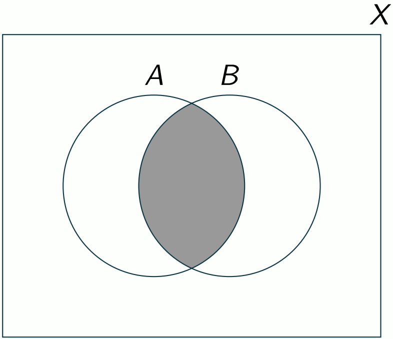
$$A \cup B := \{x \colon x \in A \vee x \in B\}$$



Operacje na zbiorach

- Przecięcie (iloczyn) zbiorów

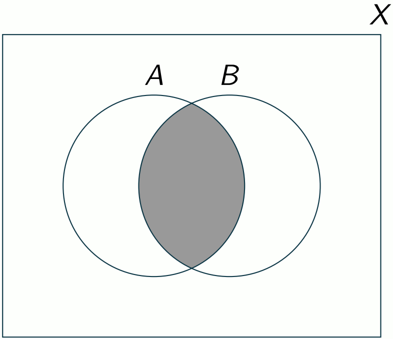
$$A \cap B := \{x \colon x \in A \wedge x \in B\}$$



Operacje na zbiorach

- Przecięcie (iloczyn) zbiorów

$$A \cap B := \{x \colon x \in A \land x \in B\}$$

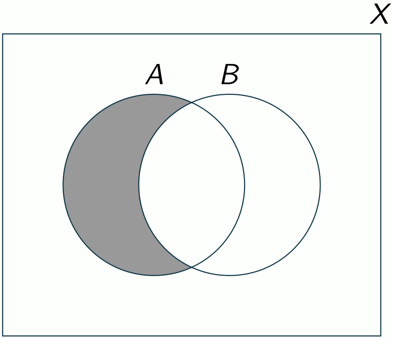


Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zbiory A i B są **rozłączne**.

Operacje na zbiorach

- Różnica zbiorów

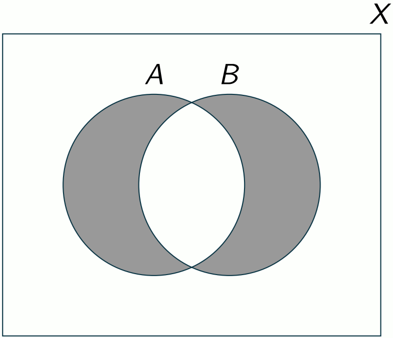
$$A \setminus B := \{x\colon x \in A \land x \notin B\}$$



Operacje na zbiorach

- Różnica symetryczna

$$A \triangle B := \{x \colon x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\}$$



Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- **Prawa łączności**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- **Prawa łączności**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Prawa rozdzielności**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- **Prawa łączności**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Prawa rozdzielności**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- **Prawa de Morgana**

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

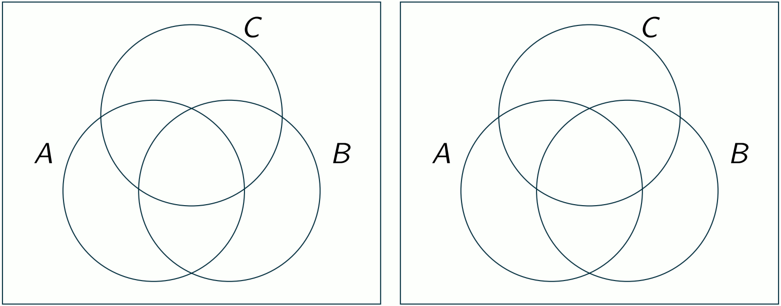
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.

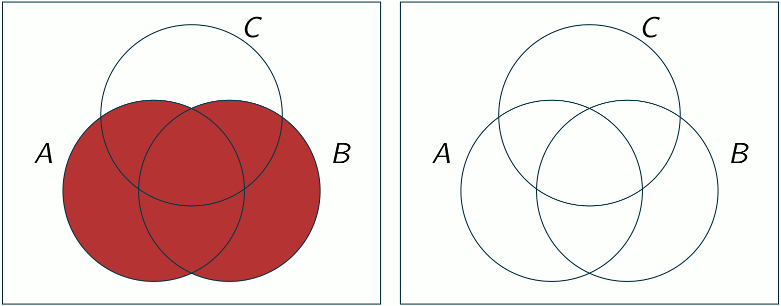


Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.

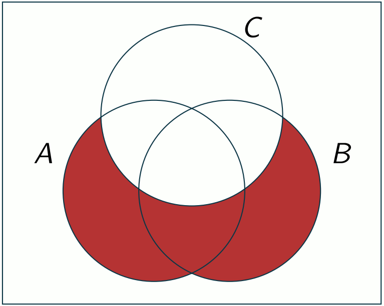


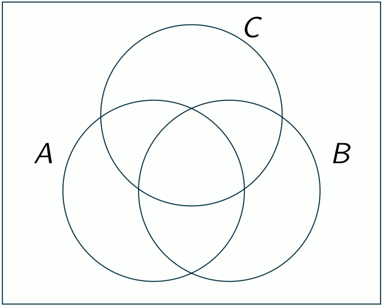
Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.



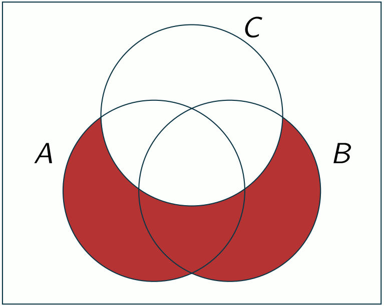


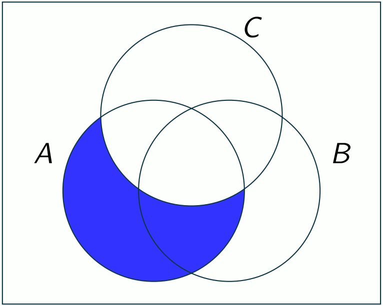
Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.



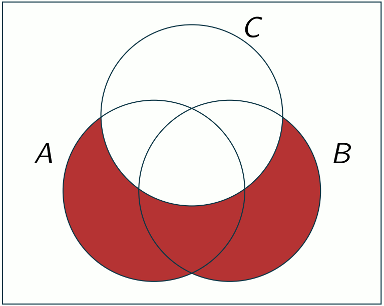


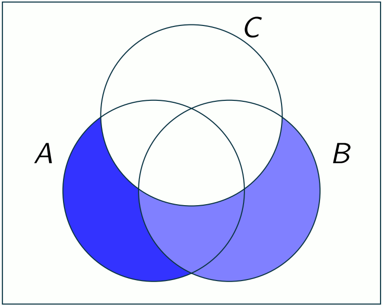
Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.



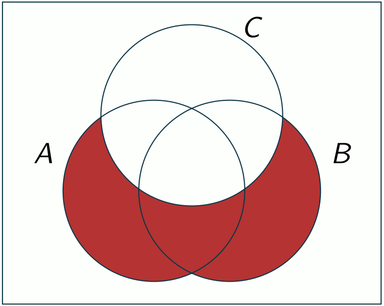


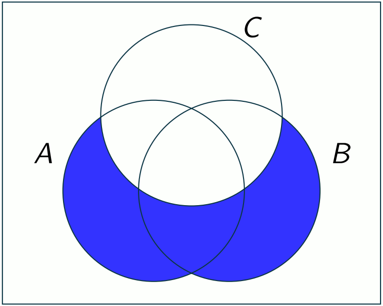
Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.





Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \big[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \big].$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Niech $x \in X$.

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \big[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)\big].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$x \in (A \cup B) \setminus C \iff$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$\begin{aligned} & x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\ & \quad \iff x \in (A \cup B) \wedge x \notin C && \text{(def. różnicy)} \end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$\begin{aligned} & x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\ & \quad \iff x \in (A \cup B) \wedge x \notin C && \text{(def. różnicy)} \\ & \quad \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C && \text{(def. sumy)} \end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$\begin{aligned} & x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\ & \quad \iff x \in (A \cup B) \wedge x \notin C && \text{(def. różnicy)} \\ & \quad \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C && \text{(def. sumy)} \\ & \quad \iff (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) && \text{(p. rozdzielności)} \end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\
& \quad \iff x \in (A \cup B) \wedge x \notin C && \text{(def. różnicy)} \\
& \quad \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C && \text{(def. sumy)} \\
& \quad \iff (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) && \text{(p. rozdzielności)} \\
& \quad \iff (x \in A \setminus C) \vee (x \in B \setminus C) && \text{(def. różnicy)}
\end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \big[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)\big].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\
& \quad \iff x \in (A \cup B) \land x \notin C && \text{(def. różnicy)} \\
& \quad \iff (x \in A \lor x \in B) \land x \notin C && \text{(def. sumy)} \\
& \quad \iff (x \in A \land x \notin C) \lor (x \in B \land x \notin C) && \text{(p. rozdzielności)} \\
& \quad \iff (x \in A \setminus C) \lor (x \in B \setminus C) && \text{(def. różnicy)} \\
& \quad \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C). && \text{(def. sumy)}
\end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 3. Mamy

$$(A \cup B) \setminus C =$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 3. Mamy

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c \qquad \text{(def. dopełnienia)}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 3. Mamy

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus C &= (A \cup B) \cap C^c && \text{(def. dopełnienia)} \\ &= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) && \text{(p. rozdzielności)} \end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 3. Mamy

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \setminus C &= (A \cup B) \cap C^c && \text{(def. dopełnienia)} \\
&= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) && \text{(p. rozdzielności)} \\
&= (A \setminus C) \cup (B \setminus C). && \text{(def. dopełnienia)}
\end{aligned}$$

Iloczyn kartezjański

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ z ustalonym porządkiem (kolejnością): a jest elementem **pierwszym**, a b **drugim**.

Iloczyn kartezjański

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ z ustalonym porządkiem (kolejnością): a jest elementem **pierwszym**, a b **drugim**.

$$(a, b) = (c, d) \iff [(a = c) \wedge (b = d)].$$

Iloczyn kartezjański

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ z ustalonym porządkiem (kolejnością): a jest elementem **pierwszym**, a b **drugim**.

$$(a, b) = (c, d) \iff [(a = c) \land (b = d)].$$

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) \colon a \in A \land b \in B\}.$$

Iloczyn kartezjański

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ z ustalonym porządkiem (kolejnością): a jest elementem **pierwszym**, a b **drugim**.

$$(a, b) = (c, d) \iff [(a = c) \wedge (b = d)].$$

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ogólnie iloczynem kartezjańskim zbiorów A_1, A_2, ..., A_n nazywamy zbiór

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \colon \bigwedge_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} a_k \in A_k\}.$$

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech

$$A = \{B \colon B \notin B\}.$$

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech

$$A = \{B\colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy

$$B \in A \iff B \notin B.$$

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech
$$A = \{B \colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy
$$B \in A \iff B \notin B.$$

Czy A jest elementem A (to znaczy, czy $A \in A$)?

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech
$$A = \{B \colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy
$$B \in A \iff B \notin B.$$

Czy A jest elementem A (to znaczy, czy $A \in A$)?

$\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **tak**. Wtedy $A \notin A$, czyli otrzymujemy sprzeczność.

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech
$$A = \{B \colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy
$$B \in A \iff B \notin B.$$

Czy A jest elementem A (to znaczy, czy $A \in A$)?

- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **tak**. Wtedy $A \notin A$, czyli otrzymujemy sprzeczność.
- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **nie**. Wtedy $A \notin A$, zatem z definicji A wynika, że $A \in A$. Sprzeczność.

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech
$$A = \{B \colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy
$$B \in A \iff B \notin B.$$

Czy A jest elementem A (to znaczy, czy $A \in A$)?

- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **tak**. Wtedy $A \notin A$, czyli otrzymujemy sprzeczność.
- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **nie**. Wtedy $A \notin A$, zatem z definicji A wynika, że $A \in A$. Sprzeczność.

A nie jest zbiorem!

Maszyna Turinga – problem stopu

Problem stopu

Czy może istnieć program komputerowy $\mathrm{STOP}(X, D)$, który dla algorytmu X oraz danych wejściowych D zwraca:

- $\rightsquigarrow$ **true** wtedy i tylko wtedy, gdy X z danymi D zatrzymuje się w skończonym czasie,
- $\rightsquigarrow$ **false** wtedy i tylko wtedy, gdy X z danymi D nie zatrzymuje się w skończonym czasie (zapętla się).

Maszyna Turinga – problem stopu

Problem stopu

Czy może istnieć program komputerowy $\mathrm{STOP}(X, D)$, który dla algorytmu X oraz danych wejściowych D zwraca:

- **true** wtedy i tylko wtedy, gdy X z danymi D zatrzymuje się w skończonym czasie,
- **false** wtedy i tylko wtedy, gdy X z danymi D nie zatrzymuje się w skończonym czasie (zapętla się).

Twierdzenie (A. Turing, 1936 r.)

Taki program nie może istnieć!

Problem stopu – dowód

Załóżmy, że program STOP istnieje. Utwórzmy program T:

```
T(X) {
  if STOP(X,X)
    while true
}
```

Problem stopu – dowód

Załóżmy, że program STOP istnieje. Utwórzmy program T:

```
T(X) {
  if STOP(X,X)
    while true
}
```

Co się stanie po wywołaniu T(T)?

Problem stopu – dowód

Załóżmy, że program STOP istnieje. Utwórzmy program T:

```
T(X) {
  if STOP(X,X)
    while true
}
```

Co się stanie po wywołaniu T(T)?

⇝ Jeżeli T(T) zatrzymuje się w skończonym czasie, to STOP(T,T) zwraca **true**, więc T(T) zapętla się.

Problem stopu – dowód

Załóżmy, że program STOP istnieje. Utwórzmy program T:

```
T(X) {
  if STOP(X,X)
    while true
}
```

Co się stanie po wywołaniu T(T)?

- Jeżeli T(T) zatrzymuje się w skończonym czasie, to STOP(T,T) zwraca **true**, więc T(T) zapętla się.
- Jeżeli T(T) nie zatrzymuje się w skończonym czasie, to STOP(T,T) zwraca **false**, więc T(T) zatrzymuje się.