Podstawowe pojęcia

- Zbiór $(A, B, C, \ldots)$.
- Zbiór pusty $\emptyset$.
- Elementy zbioru $(a, b, c, \ldots)$.
- Należenie do zbioru $(a \in A)$.

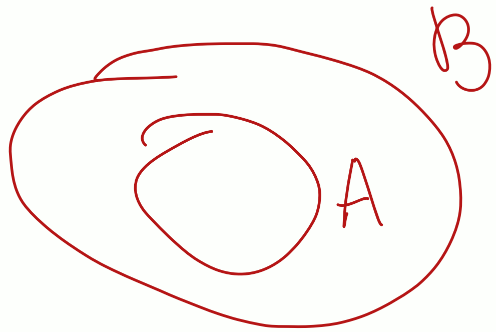
Konstruktory zbiorów

$$A = \{ \underline{x \in \mathbb{R}:} \quad \underline{x^2 > 2} \} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

Fakt, że zbiór A w pewnym uniwersum X skład się z elementów, dla których prawdziwa jest funkcja zdaniowa $\phi(x)$ zapisujemy w postaci

$$A = \{x \in X : \phi(x)\}.$$

Relacje między zbiorami



- Inkluzja (zawieranie)

$$A \subset B \iff \bigwedge_{x \in X} (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Czytamy: A jest **podzbiorem** B (lub B jest **nadzbiorem** A).
Czasami zamiast $\subset$ piszemy $\boxed{\subseteq}$.

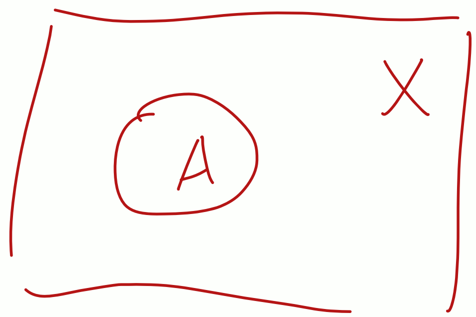
- Równość

$$A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A)$$

lub

$$A = B \iff \bigwedge_{x \in X} (x \in A \iff x \in B).$$

Dopełnienie zbioru



Dopełnieniem zbioru A (w uniwersum X) nazywamy zbiór

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\},$$

w którym zdanie $x \notin A$ oznacza $\neg(x \in A)$.

Czasami zamiast A^c piszemy $\bar{A}$.

Zbiór potęgowy

$A \rightsquigarrow 2^A \qquad \mathcal{P}(A)$

Zbiorem potęgowym 2^A zbioru A nazywamy zbiór złożony ze wszystkich podzbiorów zbioru A, to znaczy

$$2^A := \{B \colon B \subset A\}.$$

Jeżeli zbiór A jest skończony i ma n elementów, to jego zbiór potęgowy 2^A ma 2^n elementów.

Przykładowe zbiory

⇝ Zbiór liczb naturalnych

$$\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}.$$

⇝ Zbiór liczb całkowitych

$\cancel{C}$

$$\boxed{\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.} \quad \mathbb{Z}$$

⇝ Zbiór liczb wymiernych

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}.$$

⇝ Zbiór liczb rzeczywistych

$$\mathbb{R}.$$

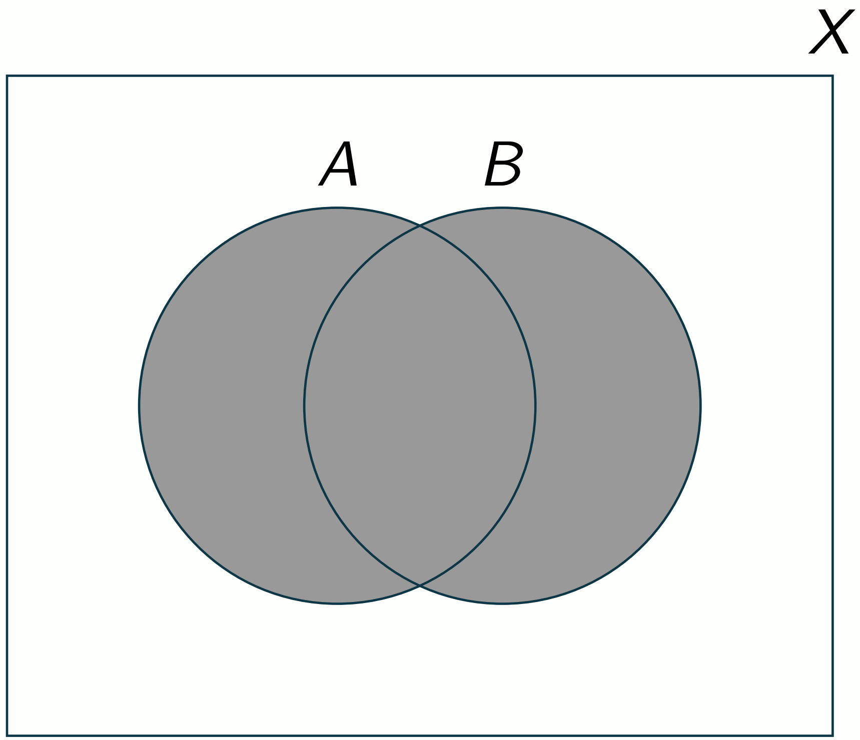
$$\mathbb{C}$$

Operacje na zbiorach

⇝ Suma zbiorów

def.

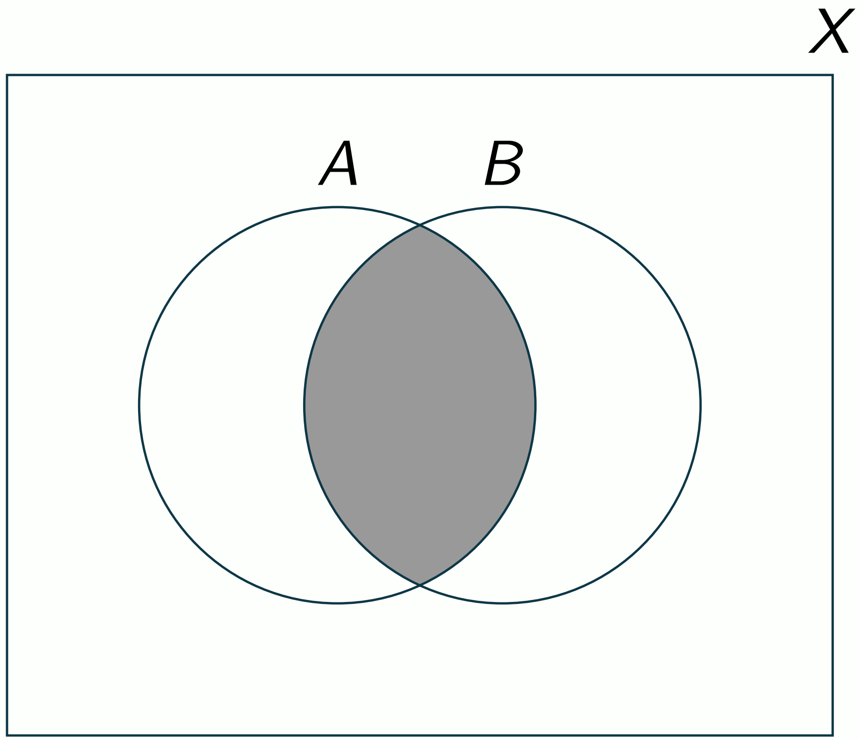
$$A \cup B := \underbrace{\{x \colon x \in A \lor x \in B\}}$$



Operacje na zbiorach

⇝ Przecięcie (iloczyn) zbiorów

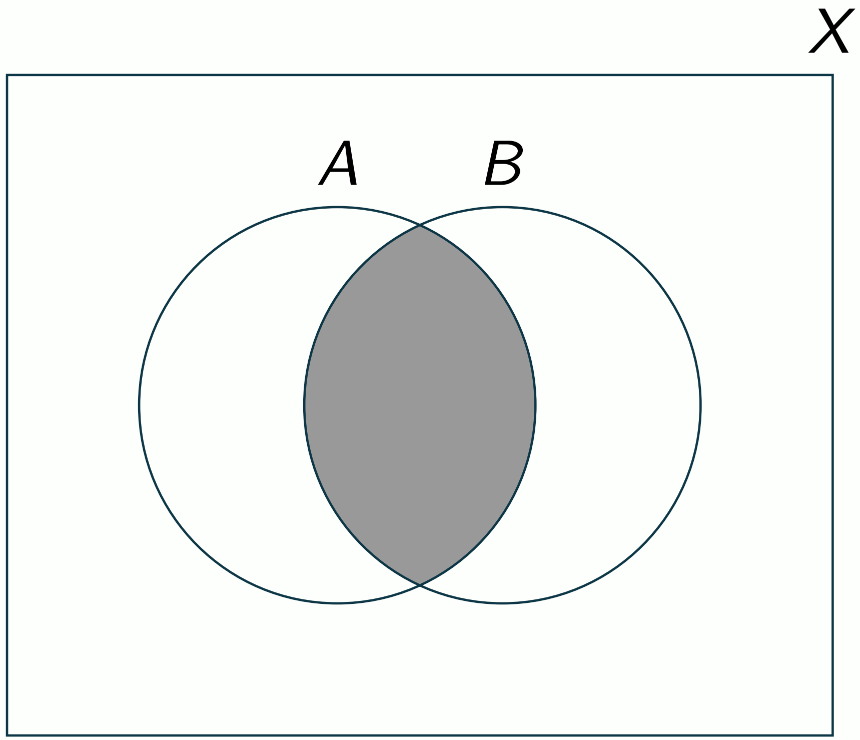
$$A \cap B := \{x \colon x \in A \wedge x \in B\}$$



Operacje na zbiorach

⇝ Przecięcie (iloczyn) zbiorów

$$A \cap B := \{x\colon x \in A \land x \in B\}$$



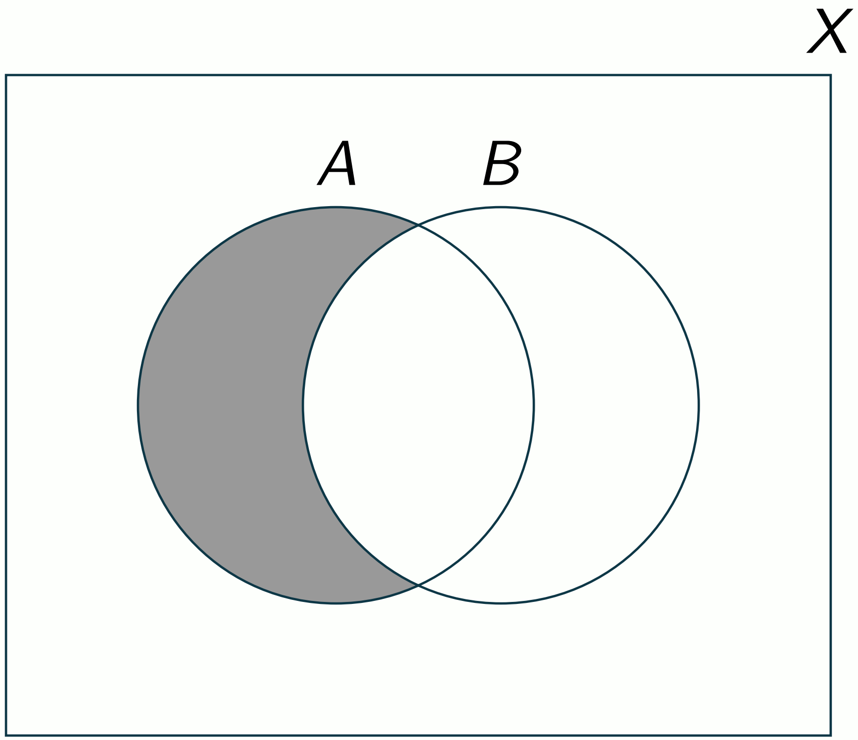
Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zbiory A i B są **rozłączne**.

Operacje na zbiorach

A - B

⇝ Różnica zbiorów

$$A \setminus B := \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\}$$



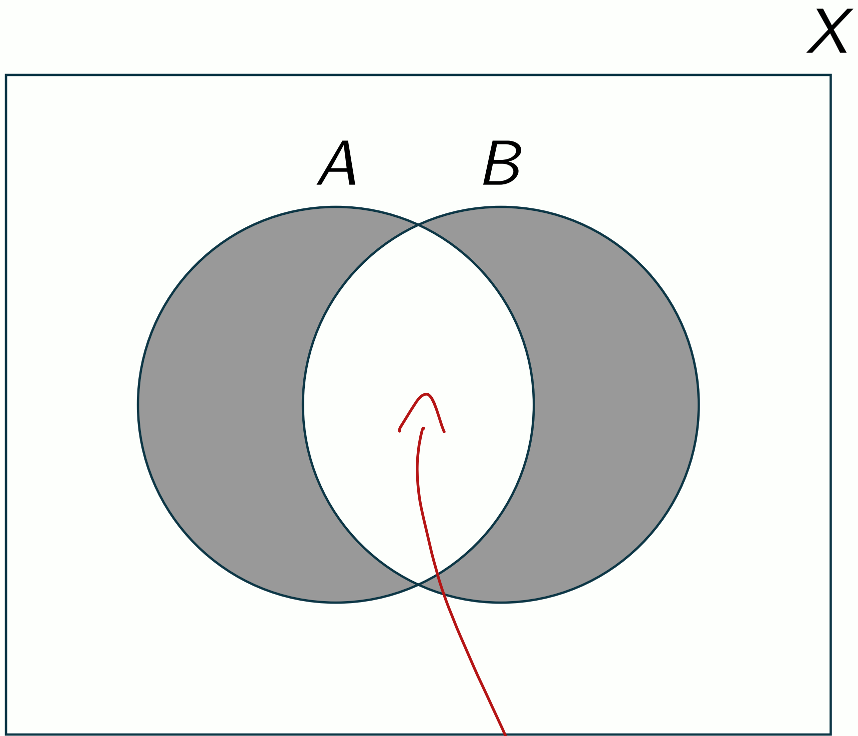
Operacje na zbiorach

$A \div B$

⇝ Różnica symetryczna

$$A \triangle B := \{x\colon x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\}$$

$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



$A \cap B$

Prawa rachunku zbiorów

⇝ **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A. \qquad \neg(\neg p) \equiv p$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- **Prawa łączności**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- **Prawa łączności**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Prawa rozdzielności**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Prawa rachunku zbiorów

- **Prawo podwójnego dopełnienia**

$$(A^c)^c = A.$$

- **Prawa przemienności**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- **Prawa łączności**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Prawa rozdzielności**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- **Prawa de Morgana**

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

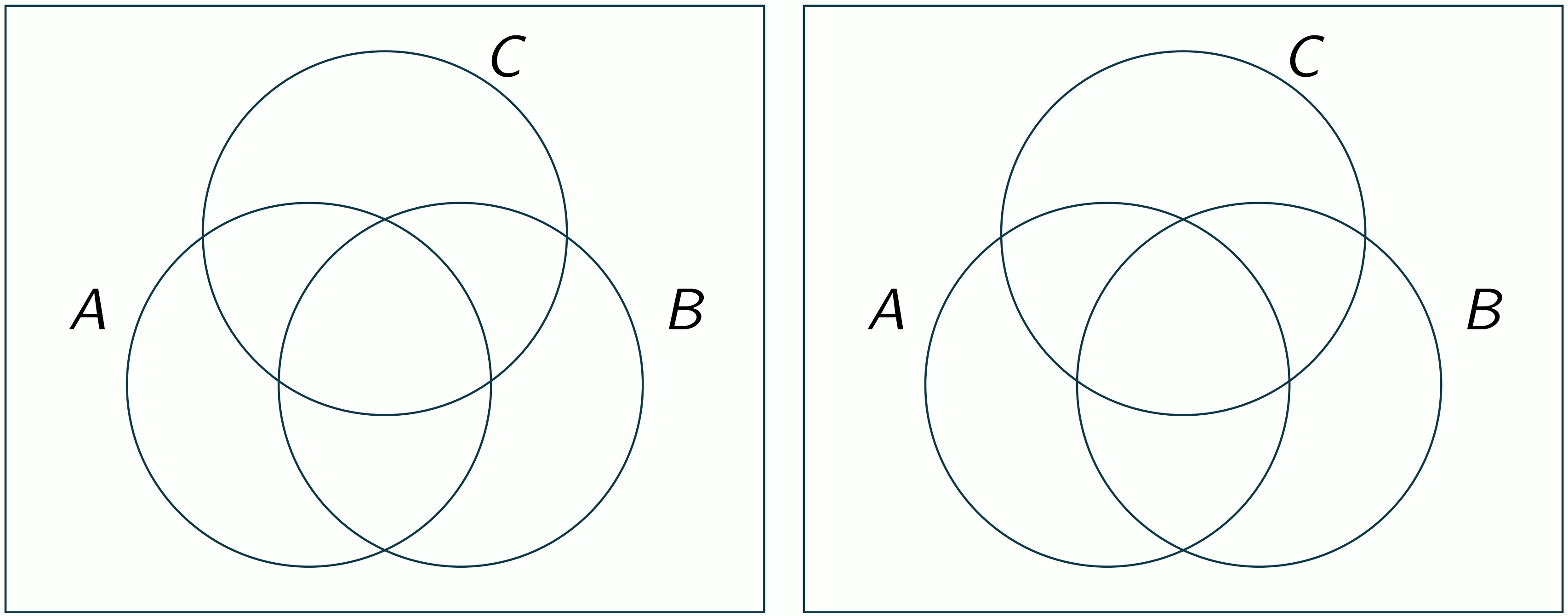
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.

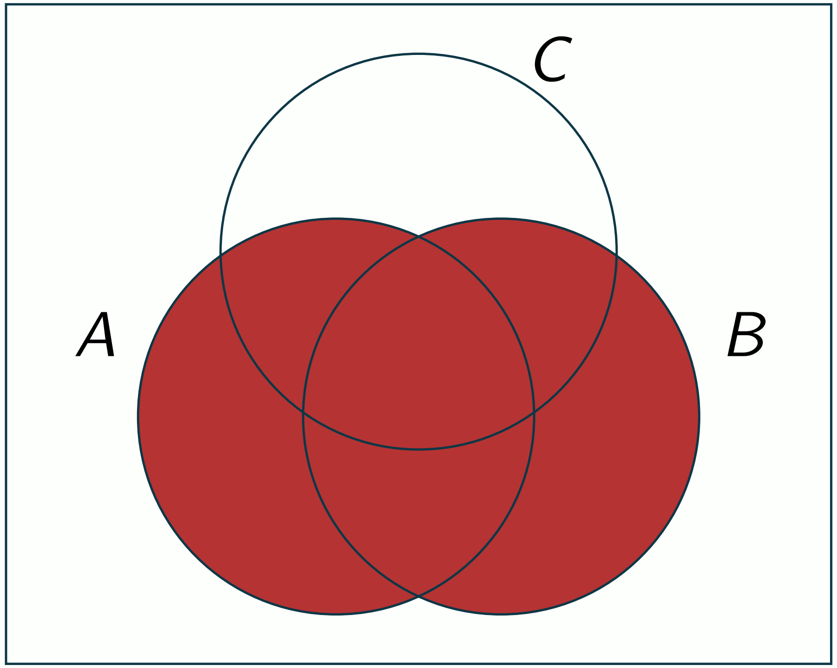


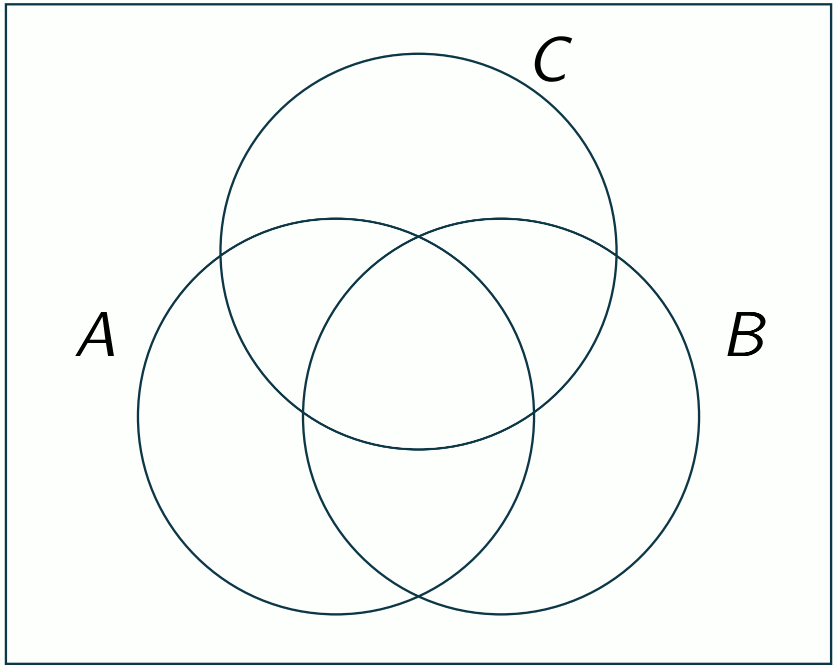
Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.



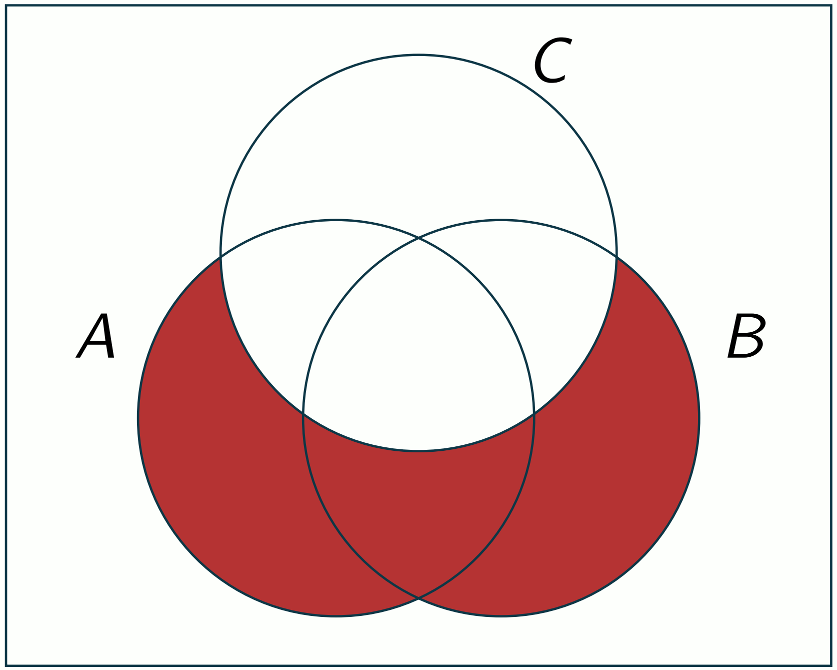


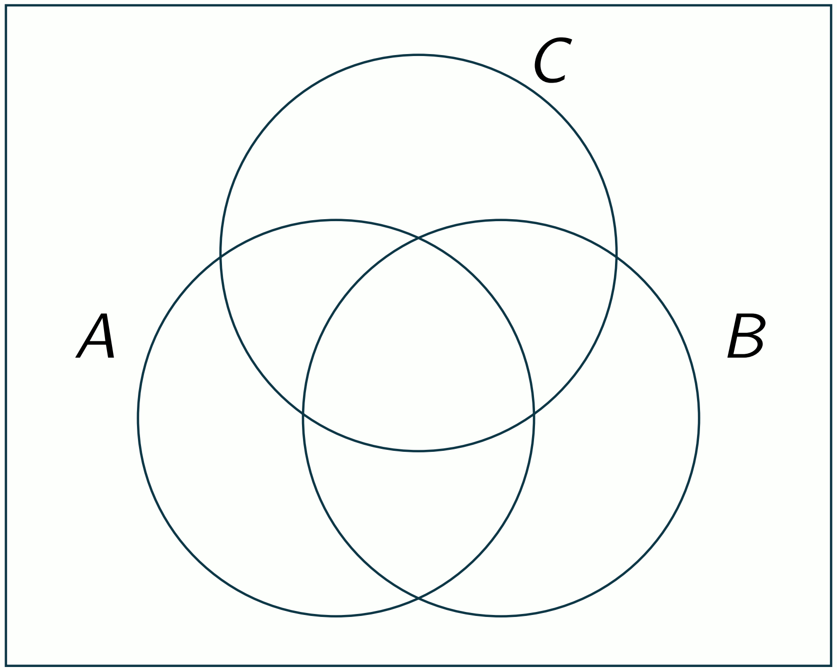
Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.



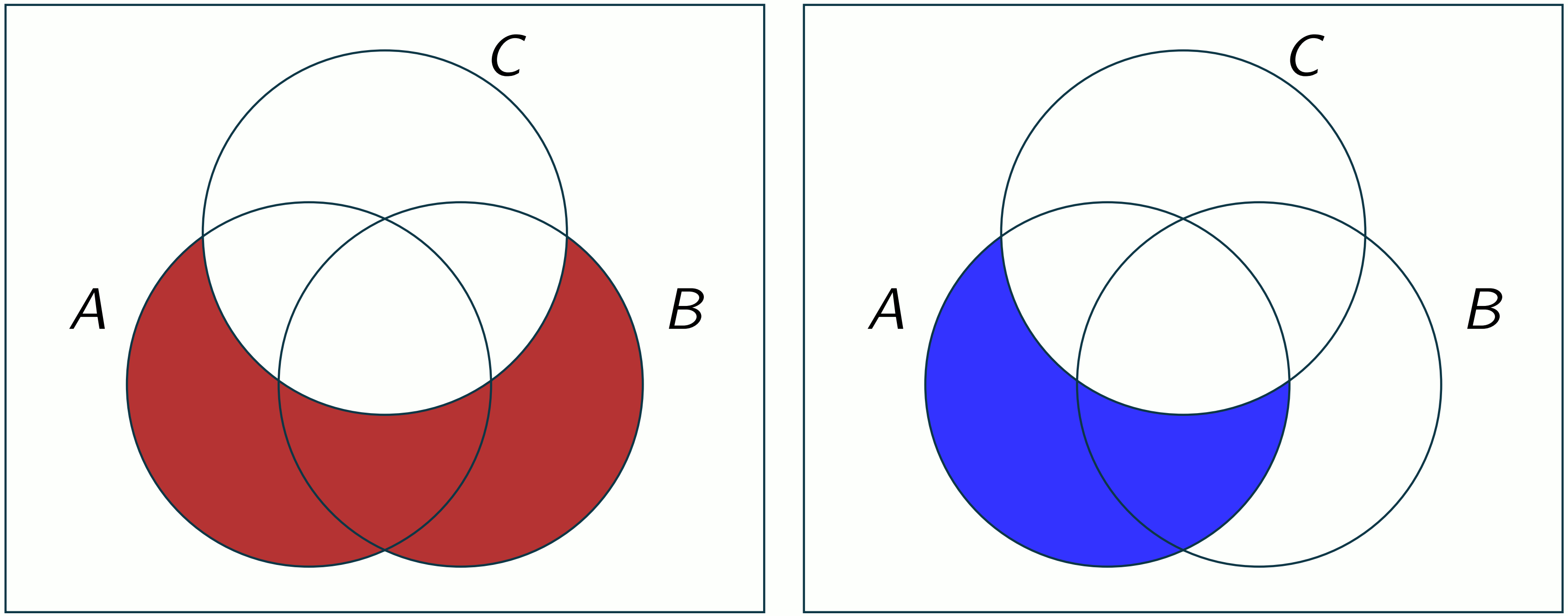


Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.

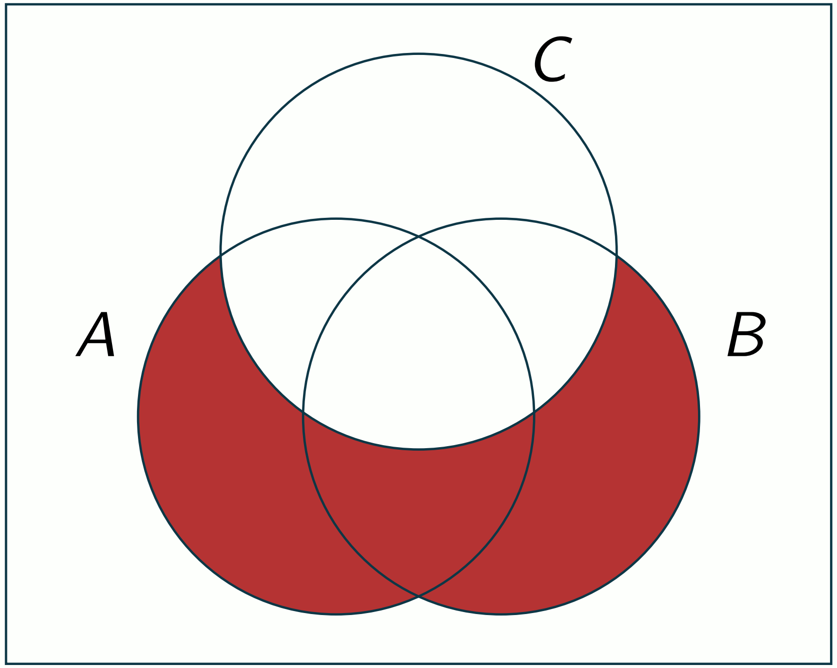


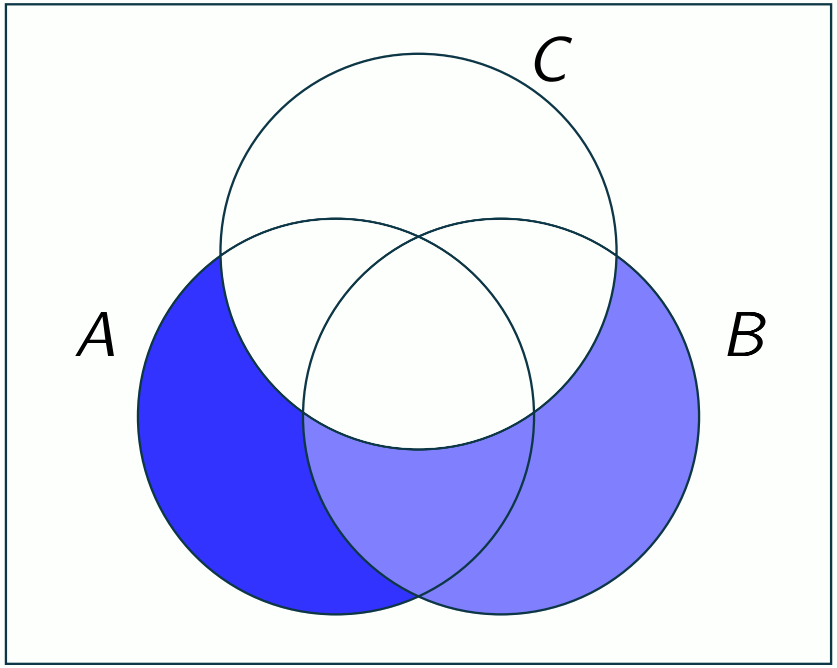
Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.



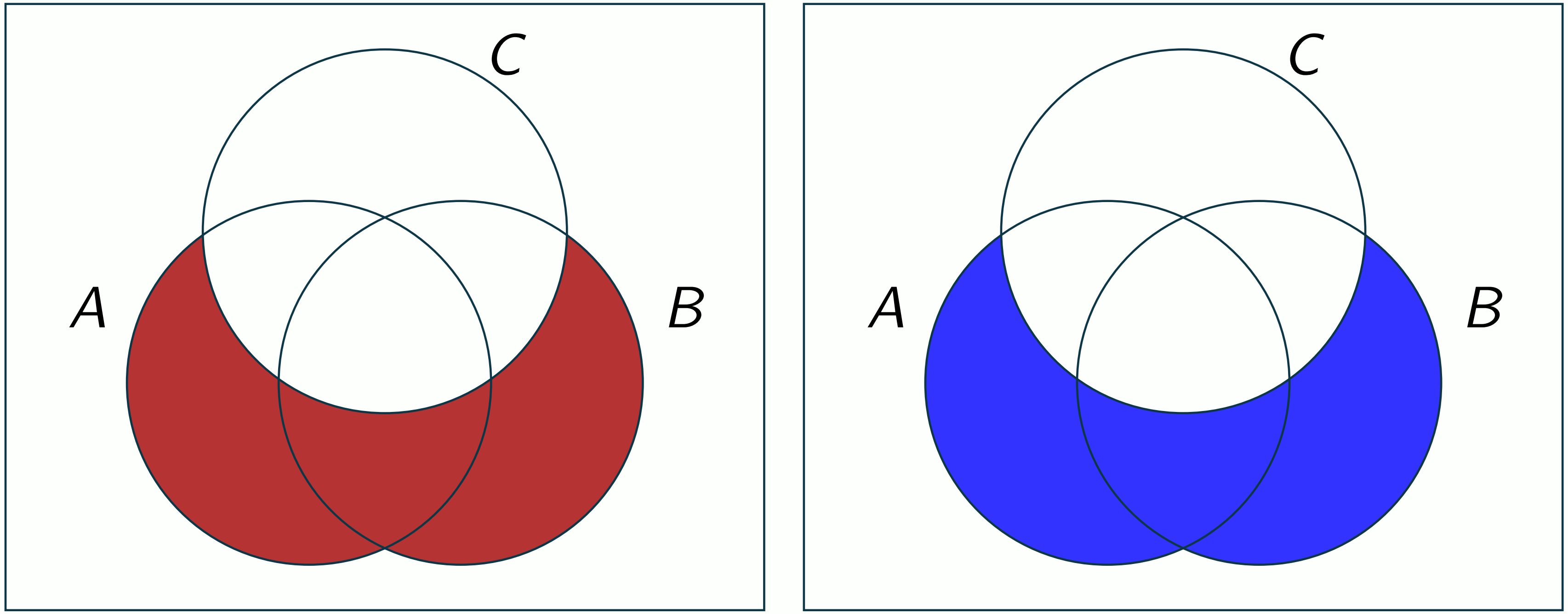


Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 1.



Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

$$A = B \equiv \bigwedge_{x \in X} x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Niech $x \in X$.

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$x \in (A \cup B) \setminus C \iff$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$x \in (A \cup B) \setminus C \iff$$

$$\iff x \in \underline{(A \cup B)} \wedge x \notin C \qquad \text{(def. różnicy)}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\
& \quad \iff x \in (A \cup B) \wedge x \notin C && \text{(def. różnicy)} \\
& \quad \iff (\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q}) \wedge \underbrace{x \notin C}_{r} && \text{(def. sumy)}
\end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\
& \quad \iff x \in (A \cup B) \land x \notin C && \text{(def. różnicy)} \\
& \quad \iff (x \in A \lor x \in B) \land x \notin C && \text{(def. sumy)} \\
& \quad \iff \underbrace{(x \in A \land x \notin C)}_{x \in A \setminus C} \lor \underbrace{(x \in B \land x \notin C)}_{x \in B \setminus C} && \text{(p. rozdzielności)}
\end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \big[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)\big].$$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\
& \quad \iff x \in (A \cup B) \land x \notin C && \text{(def. różnicy)} \\
& \quad \iff (x \in A \lor x \in B) \land x \notin C && \text{(def. sumy)} \\
& \quad \iff (x \in A \land x \notin C) \lor (x \in B \land x \notin C) && \text{(p. rozdzielności)} \\
& \quad \iff (x \in A \setminus C) \lor (x \in B \setminus C) && \text{(def. różnicy)}
\end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 2. Musimy pokazać, że

$$\bigwedge_{x \in X} \left[x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \right].$$

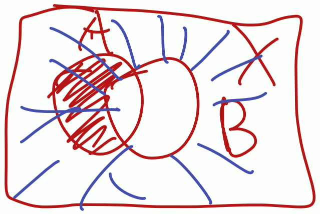
Niech $x \in X$. Wtedy

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus C \iff \\
& \iff x \in (A \cup B) \land x \notin C && \text{(def. różnicy)} \\
& \iff (x \in A \lor x \in B) \land x \notin C && \text{(def. sumy)} \\
& \iff (x \in A \land x \notin C) \lor (x \in B \land x \notin C) && \text{(p. rozdzielności)} \\
& \iff (x \in A \setminus C) \lor (x \in B \setminus C) && \text{(def. różnicy)} \\
& \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C). && \text{(def. sumy)}
\end{aligned}$$

Przykład

$A, B \subset X$

$A \setminus B = A \cap B^c$



$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 3. Mamy

$$(A \cup B) \setminus C =$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 3. Mamy

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c \qquad \text{(def. dopełnienia)}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Dowód 3. Mamy

$$\begin{aligned}(A \cup B) \setminus C &= (A \cup B) \cap C^c && \text{(def. dopełnienia)}\\ &= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) && \text{(p. rozdzielności)}\end{aligned}$$

Przykład

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

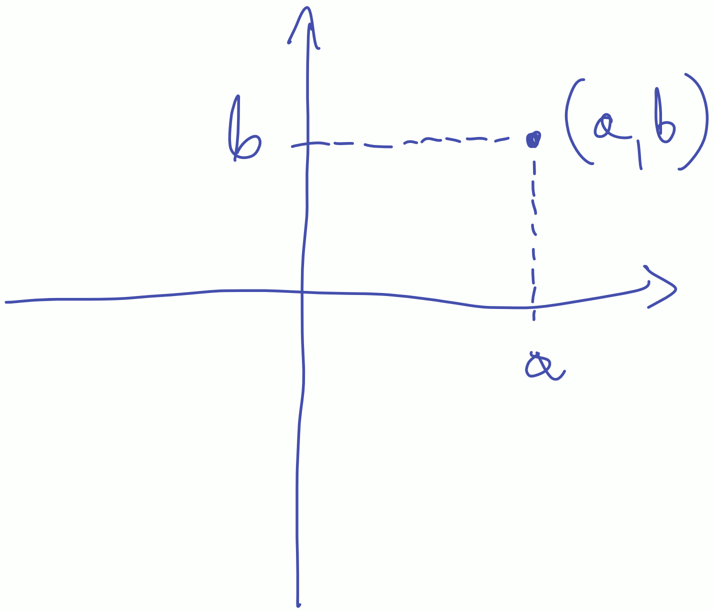
Dowód 3. Mamy

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \setminus C &= (A \cup B) \cap C^c && \text{(def. dopełnienia)} \\
&= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) && \text{(p. rozdzielności)} \\
&= (A \setminus C) \cup (B \setminus C). && \text{(def. dopełnienia)}
\end{aligned}$$

Iloczyn kartezjański

Parą uporządkowaną $\boxed{(a, b)}$ nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ z ustalonym porządkiem (kolejnością): a jest elementem **pierwszym**, a b **drugim**.

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$



Iloczyn kartezjański

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ z ustalonym porządkiem (kolejnością): a jest elementem **pierwszym**, a b **drugim**.

$$(a, b) = (c, d) \iff [(a = c) \wedge (b = d)].$$

Iloczyn kartezjański

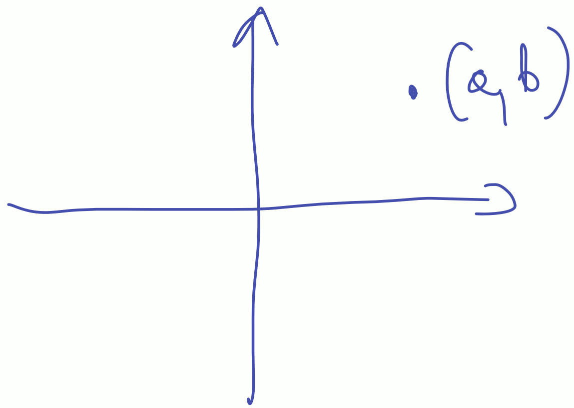
Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ z ustalonym porządkiem (kolejnością): a jest elementem **pierwszym**, a b **drugim**.

$$(a, b) = (c, d) \iff [(a = c) \wedge (b = d)].$$

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}.$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$



Iloczyn kartezjański

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ z ustalonym porządkiem (kolejnością): a jest elementem **pierwszym**, a b **drugim**.

$$(a, b) = (c, d) \iff [(a = c) \wedge (b = d)].$$

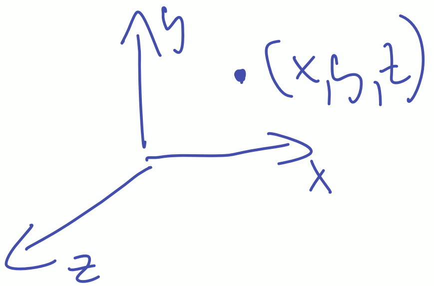
Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ogólnie iloczynem kartezjańskim zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy zbiór

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \colon \bigwedge_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} a_k \in A_k\}.$$

$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech
$$A := \{B\colon B \notin B\}.$$

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech

$$A = \{B\colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy

$$B \in A \iff B \notin B.$$

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech
$$A = \{B\colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy
$$B \in A \iff B \notin B.$$

Czy A jest elementem A (to znaczy, czy $A \in A$)?

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech

$$A = \{B \colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy

$$B \in A \iff B \notin B.$$

Czy A jest elementem A (to znaczy, czy $A \in A$)?

$\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **tak**. Wtedy $A \notin A$, czyli otrzymujemy sprzeczność.

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech

$$A = \{B \colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy

$$B \in A \iff B \notin B.$$

Czy A jest elementem A (to znaczy, czy $A \in A$)?

- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **tak**. Wtedy $A \notin A$, czyli otrzymujemy sprzeczność.
- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **nie**. Wtedy $A \notin A$, zatem z definicji A wynika, że $A \in A$. Sprzeczność.

$$A = \{ B : B \notin B \}$$

$$A = \{ x \in \boxed{X} : \Phi(x) \}$$

K. Gödel 1931 $e = mc^2$

A. Turing 1936 C. Shannon

Antynomia Russella

Paradoks kłamcy

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to kłamie, czy mówi prawdę?

Niech
$$A = \{B \colon B \notin B\}.$$

Zatem z definicji zbioru A mamy
$$B \in A \iff B \notin B.$$

Czy A jest elementem A (to znaczy, czy $A \in A$)?

- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **tak**. Wtedy $A \notin A$, czyli otrzymujemy sprzeczność.
- $\rightsquigarrow$ Załóżmy, że **nie**. Wtedy $A \notin A$, zatem z definicji A wynika, że $A \in A$. Sprzeczność.

A nie jest zbiorem!

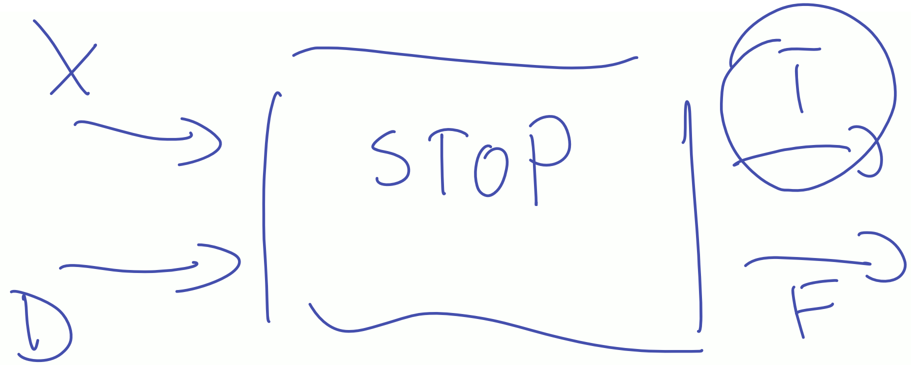
Maszyna Turinga – problem stopu

halting problem

Problem stopu

Czy może istnieć program komputerowy STOP(X, D), który dla algorytmu X oraz danych wejściowych D zwraca:

- **true** wtedy i tylko wtedy, gdy X z danymi D zatrzymuje się w skończonym czasie,
- **false** wtedy i tylko wtedy, gdy X z danymi D nie zatrzymuje się w skończonym czasie (zapętla się).



$X(D)$ zatrzymuje się

$X(D)$ się **nie** zatrzymuje

Maszyna Turinga – problem stopu

Problem stopu

Czy może istnieć program komputerowy $\mathrm{STOP}(X, D)$, który dla algorytmu X oraz danych wejściowych D zwraca:

- **true** wtedy i tylko wtedy, gdy X z danymi D zatrzymuje się w skończonym czasie,
- **false** wtedy i tylko wtedy, gdy X z danymi D nie zatrzymuje się w skończonym czasie (zapętla się).

Twierdzenie (A. Turing, 1936 r.)

Taki program nie może istnieć!

Problem stopu – dowód

Załóżmy, że program STOP istnieje. Utwórzmy program T:

```
T(X) {
  if STOP(X,X)
    while true
}
```

$\leftarrow\ = T \iff X(X)$ się zatrzymuje

Problem stopu – dowód

Załóżmy, że program STOP istnieje. Utwórzmy program T:

```
T(X) {
  if STOP(X,X)
    while true
}
```

Co się stanie po wywołaniu T(T)?

Problem stopu – dowód

Załóżmy, że program STOP istnieje. Utwórzmy program T:

```
T(X) {
  if STOP(X,X)
    while true
}
```

Co się stanie po wywołaniu T(T)?

- Jeżeli T(T) zatrzymuje się w skończonym czasie, to STOP(T,T) zwraca **true**, więc T(T) zapętla się.

Problem stopu – dowód

Załóżmy, że program STOP istnieje. Utwórzmy program T:

```
T(X) {
  if STOP(X,X)
    while true
}
```

Co się stanie po wywołaniu T(T)?

- Jeżeli T(T) zatrzymuje się w skończonym czasie, to STOP(T,T) zwraca **true**, więc T(T) zapętla się.
- Jeżeli T(T) nie zatrzymuje się w skończonym czasie, to STOP(T,T) zwraca **false**, więc T(T) zatrzymuje się.