IMIĘ i NAZWISKO (DRUKOWANE): ....

Nr grupy: ....

40 pkt.

Kolokwium II – 3 lutego 2023 r. – Zestaw A

1. W zbiorze $\mathbb{Z}$ określono relację równoważności R:

10 pkt.

$$xRy \qquad \iff \qquad x^4 \equiv y^4 \pmod 7.$$

Wyznacz klasy abstrakcji względem tej relacji.

Rozwiązanie: Wystarczy sprawdzić, do których klas należą liczby postaci $7k+i$ dla $i \in \{0,1,\dots,6\}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
[0] &= \{x \in \mathbb{Z}\colon x^4 \equiv 0 \pmod 7\} = \{7k\colon k \in \mathbb{Z}\},\\
[1] = [6] &= \{x \in \mathbb{Z}\colon x^4 \equiv 1 \pmod 7\} = \{7k+1\colon k \in \mathbb{Z}\} \cup \{7k+6\colon k \in \mathbb{Z}\},\\
[2] = [5] &= \{x \in \mathbb{Z}\colon x^4 \equiv 2 \pmod 7\} = \{7k+2\colon k \in \mathbb{Z}\} \cup \{7k+5\colon k \in \mathbb{Z}\},\\
[3] = [4] &= \{x \in \mathbb{Z}\colon x^4 \equiv 4 \pmod 7\} = \{7k+3\colon k \in \mathbb{Z}\} \cup \{7k+4\colon k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

□

2. Rozwiąż układ kongruencji

10 pkt.

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{9}, \\ 3x \equiv 2 \pmod{11}, \\ 6x \equiv 5 \pmod{29}. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Zacznijmy od rozwiązania ostatniej kongruencji. Ponieważ $6 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{29}$, to $x \equiv 25 \pmod{29}$ lub równoważnie

$$x = 25 + 29k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Mamy więc $3x = 75 + 87k \equiv -2 - k \pmod{11}$ i, wykorzystując drugą kongruencję, otrzymujemy $-2 - k \equiv 2 \pmod{11}$, co daje

$$k = -4 + 11m, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

W konsekwencji $x = -91 + 11 \cdot 29m$. Wstawiając ten wynik do pierwszej kongruencji, dostajemy $-1 + 4m \equiv 4 \pmod{9}$. Skoro $4 \cdot 2 \equiv -1 \pmod{9}$, to $-m \equiv 1 \pmod{9}$, co daje

$$m = -1 + 9l, \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Ostatecznie

$$x = -410 + 9 \cdot 11 \cdot 29l = 2461 + 9 \cdot 11 \cdot 29l', \qquad l, l' \in \mathbb{Z}.$$

□

3. Uzasadnij, że liczba

$$2^{3^{2023}} - 8$$

10 pkt.

jest podzielna przez 29.

Rozwiązanie: Ponieważ 29 jest liczbą pierwszą, to z małego twierdzenia Fermata wynika, że $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$. Stąd $2^{28k} \equiv 1 \pmod{29}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, co implikuje

$$2^n \equiv 2^{n \bmod 28} \pmod{29}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto $3^3 = 27 \equiv -1 \pmod{28}$, więc $3^6 \equiv 1 \pmod{28}$, skąd $3^{6k} \equiv 1 \pmod{28}$ dla $k \in \mathbb{N}$ i w konsekwencji

$$3^n \equiv 3^{n \bmod 6} \pmod{28}.$$

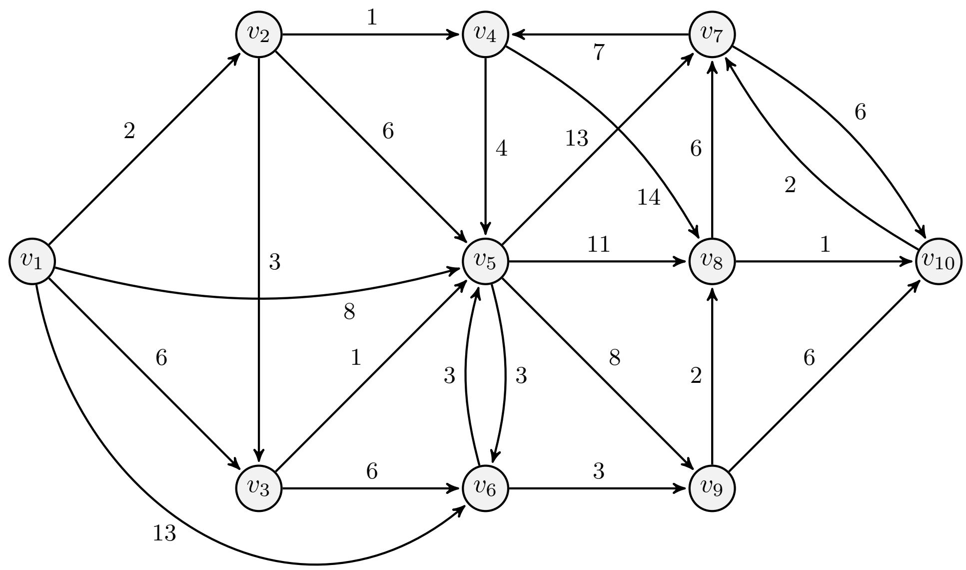
Ostatecznie

$$2^{3^{2023}} = 2^{3^{6\cdot 337+1}} \equiv 2^3 = 8 \pmod{29},$$

więc $2^{3^{2023}} - 8 \equiv 0 \pmod{29}$. $\square$

4. Wyznacz, przy pomocy algorytmu Dijkstry, najkrótsze ścieżki łączące wierzchołek v_1 ze wszystkimi pozostałymi dla grafu

10 pkt.



Rozwiązanie: Postępując zgodnie z algorytmem Dijkstry, otrzymujemy

L	$D(2)$	$D(3)$	$D(4)$	$D(5)$	$D(6)$	$D(7)$	$D(8)$	$D(9)$	$D(10)$
$\emptyset$	2	6	∞	8	13	∞	∞	∞	∞
$\{v_2\}$	2	5	3	8	13	∞	∞	∞	∞
$\{v_2, v_4\}$	2	5	3	7	13	∞	17	∞	∞
$\{v_2, v_4, v_3\}$	2	5	3	6	11	∞	17	∞	∞
$\{v_2, v_4, v_3, v_5\}$	2	5	3	6	9	19	17	14	∞
$\{v_2, v_4, v_3, v_5, v_6\}$	2	5	3	6	9	19	17	12	∞
$\{v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_9\}$	2	5	3	6	9	19	14	12	18
$\{v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_9, v_8\}$	2	5	3	6	9	19	14	12	15
$\{v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_9, v_8, v_7\}$	2	5	3	6	9	19	14	12	15
$\{v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_9, v_8, v_7, v_{10}\}$	2	5	3	6	9	17	14	12	15

$\square$