IMIĘ i NAZWISKO (DRUKOWANE): ....

40 pkt.

Nr grupy: ....

Kolokwium I – 19 grudnia 2022 r. – Zestaw B

1. Zapisz formułę logiczną

10 pkt.

$$p \Rightarrow (q \oplus r)$$

w koniunkcyjnej i dysjunkcyjnej postaci normalnej.

Rozwiązanie: Sposób I. Wykorzystując równoważności $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ oraz $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$, a następnie prawo łączności, otrzymujemy

$$p \Rightarrow (q \oplus r) \equiv \neg p \vee [(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)] \equiv \underbrace{\neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)}_{\text{DNF}}.$$

Ostatnia formuła jest zapisana w dysjunkcyjnej postaci normalnej. Jednocześnie, na mocy prawa rozdzielności, mamy

$$\begin{aligned} \neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) &\equiv \big[(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)\big] \vee (\neg q \wedge r) \equiv \\ &\equiv (\neg p \vee q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee r), \end{aligned}$$

a to jest koniunkcyjna postać normalna, którą można jeszcze uprościć do postaci

$$\underbrace{(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg q)}_{\text{CNF}}.$$

Sposób II. Tabelą prawdy formuły $p \Rightarrow (q \oplus r)$ jest

p	q	r	$p \Rightarrow (q \oplus r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

Rozważając te wartościowania zmiennych, w których formuła przyjmuje wartość logiczną T, możemy zapisać równoważną dysjunkcyjną postać normalną

$$\underbrace{(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)}_{\text{DNF}}.$$

Podobnie, rozważając te wiersze, w których formuła przyjmuje wartość F, koniunkcyjną postać normalną możemy zapisać jako

$$\underbrace{(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)}_{\text{CNF}}$$

$\square$

2. Wyznacz wykres funkcji zdaniowej Φ zmiennej rzeczywistej x, przy czym

10 pkt.

$$\Phi(x) \quad \equiv \quad \bigvee_{a\in\mathbb{R}} x^2(a^2-3)+x^4 \leqslant 0.$$

Rozwiązanie: Mamy

$$\Phi(x) \equiv \bigvee_{a\in\mathbb{R}} x^2(a^2-3) \leqslant -x^4.$$

Ponieważ

$$\Phi(0) \equiv \bigvee_{a\in\mathbb{R}} 0 \leqslant 0 \equiv \mathrm{T},$$

to 0 jest elementem wykresu funkcji zdaniowej Φ. Rozważmy teraz dowolny $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wtedy $x^2 > 0$, więc,

$$\Phi(x) \equiv \bigvee_{a\in\mathbb{R}} a^2 - 3 \leqslant -x^2 \equiv \bigvee_{a\in\mathbb{R}} a^2 \leqslant 3 - x^2.$$

Nierówność $a^2 \leqslant 3 - x^2$ jest spełniona dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $3 - x^2$ jest nieujemna (w przeciwnym razie, gdyby $3 - x^2 < 0$, kwadrat liczby a byłby ujemny). Stąd

$$\Phi(x) \equiv 3 - x^2 \geqslant 0 \equiv 3 \geqslant x^2 \equiv |x| \leqslant \sqrt{3}$$

i ostatecznie wykresem funkcji Φ jest przedział $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$. $\square$

3. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$A \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) \setminus [(B \cap C) \setminus A].$$

10 pkt.

Rozwiązanie: Niech x będzie dowolnym elementem uniwersum X. Wtedy

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \triangle C) &\equiv x \in A \vee (x \in B \cup C \wedge x \notin B \cap C) \equiv \\ &\equiv x \in A \vee \big[(x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(x \in B \cap C)\big] \equiv \\ &\stackrel{(1)}{\equiv} (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge [x \in A \vee \neg(x \in B \cap C)] \equiv \\ &\stackrel{(2)}{\equiv} (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge \neg[x \notin A \wedge x \in B \cap C] \equiv \\ &\equiv x \in (A \cup B \cup C) \wedge \neg(x \in (B \cap C) \setminus A) \equiv \\ &\equiv x \in (A \cup B \cup C) \setminus [(B \cap C) \setminus A], \end{aligned}$$

przy czym równoważność (1) jest konsekwencją prawa rozdzielności, a (2) prawa de Morgana. $\square$

4. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ prawdziwa jest nierówność

10 pkt.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4n}.$$

Rozwiązanie: Nierówność z treści zadania można zapisać w postaci

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4n}. \tag{1}$$

Dla $n=4$ przyjmuje ona postać

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<\frac{7}{10}-\frac{1}{16},$$

a po uproszczeniach

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<\frac{1}{2}-\frac{3}{16},$$

co jest równoważne $\frac{13}{42}<\frac{5}{16}$ i dalej $13\cdot 16<5\cdot 42$. Ostatecznie, dla $n=4$ nierówność (1) zachodzi.

Wybierzmy dowolną liczbę naturalną $n \geqslant 4$ i załóżmy, że nierówność (1) jest spełniona dla tej liczby. Pokażemy, że nierówność (1) zachodzi, gdy n zastąpimy w niej przez $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k}&=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\\&\overset{(1)}{<}\frac{7}{10}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Pozostaje tylko sprawdzić, że

$$\frac{7}{10}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{7}{10}-\frac{1}{4n+4},$$

co jest równoważne

$$\frac{1}{2n+1}\leqslant\frac{1}{4n}-\frac{\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}}{n+1}.$$

Mnożąc ostatnią nierówność obustronnie przez $4n(n+1)(2n+1)$, otrzymujemy

$$4n(n+1)\leqslant(n+1)(2n+1)+n(2n+1)=(2n+1)(2n+1)=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1,$$

a ta nierówność jest spełniona. $\square$