IMIĘ i NAZWISKO (DRUKOWANE): ....

40 pkt.

Nr grupy: ....

Kolokwium I – 19 grudnia 2022 r. – Zestaw A

1. Zapisz formułę logiczną

10 pkt.

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

w koniunkcyjnej i dysjunkcyjnej postaci normalnej.

Rozwiązanie: Sposób I. Wykorzystując dwukrotnie równoważność $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, a następnie prawo de Morgana, otrzymujemy

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee r \equiv \underbrace{(p \wedge \neg q) \vee r}_{\text{DNF}}.$$

Ostatnia formuła jest zapisana w dysjunkcyjnej postaci normalnej. Jednocześnie, na mocy prawa rozdzielności, mamy

$$(p \wedge \neg q) \vee r \equiv \underbrace{(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)}_{\text{CNF}},$$

a to jest koniunkcyjna postać normalna.

Sposób II. Tabelą prawdy formuły $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ jest

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

Rozważając te wartościowania zmiennych, w których formuła przyjmuje wartość logiczną T, możemy zapisać równoważną dysjunkcyjną postać normalną

$$\underbrace{(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)}_{\text{DNF}}.$$

Podobnie, rozważając te wiersze, w których formuła przyjmuje wartość F, koniunkcyjną postać normalną możemy zapisać jako

$$\underbrace{(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)}_{\text{CNF}}$$

□

2. Wyznacz wykres funkcji zdaniowej Φ zmiennej rzeczywistej x, przy czym

10 pkt.

$$\Phi(x) \quad \equiv \quad \bigwedge_{a\in\mathbb{R}} x^2(a^2+2) - x^4 \geqslant 0.$$

Rozwiązanie: Mamy

$$\Phi(x) \equiv \bigwedge_{a\in\mathbb{R}} x^2(a^2+2) \geqslant x^4.$$

Ponieważ

$$\Phi(0) \equiv \bigwedge_{a\in\mathbb{R}} 0 \geqslant 0 \equiv \mathrm{T},$$

to 0 jest elementem wykresu Φ, czyli $0 \in S(\Phi)$. Ustalmy teraz dowolne $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dzieląc obustronnie nierówność występującą w definicji Φ przez x^2 (jest to teraz liczba dodatnia), otrzymujemy

$$\Phi(x) \equiv \bigwedge_{a\in\mathbb{R}} a^2+2 \geqslant x^2 \equiv \bigwedge_{a\in\mathbb{R}} a^2 \geqslant x^2-2.$$

Najmniejszą wartością jaką może przyjąć a^2 jest oczywiście 0 (dla $a = 0$), więc nierówność $a^2 \geqslant x^2 - 2$ jest spełniona dla każdego $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 - 2$ jest liczbą niedodatnią, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$. Ostatecznie

$$S(\Phi) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle.$$

$\square$

3. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

10 pkt.

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

Następnie, przy jej pomocy, pokaż, że

$$A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C).$$

Rozwiązanie: Niech x będzie dowolnym elementem uniwersum X. Wtedy

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\equiv (x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in C) \equiv \\ &\overset{(1)}{\equiv} (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C) \equiv \\ &\overset{(2)}{\equiv} (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \equiv \\ &\overset{(3)}{\equiv} \mathrm{F} \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \equiv \\ &\overset{(4)}{\equiv} x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \equiv \\ &\overset{(5)}{\equiv} x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \equiv \\ &\equiv x \in A \cap (B \setminus C), \end{aligned}$$

przy czym równoważność (1) jest konsekwencją prawa de Morgana, (2) prawa rozdzielności i łączności koniunkcji, (3) prawa przemienności koniunkcji oraz faktu, że $p \wedge \neg p \equiv \mathrm{F}$, (4) prawa $\mathrm{F} \vee p \equiv p$, a (5) prawa łączności koniunkcji.

Dysponując pierwszą równością, możemy napisać

$$\begin{aligned} A \cap (B \bigtriangleup C) &= A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] = \\ &\overset{(1)}{=} [A \cap (B \setminus C)] \cup [A \cap (C \setminus B)] = \\ &\overset{(2)}{=} [(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B)] = \\ &\overset{(3)}{=} (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C), \end{aligned}$$

przy czym równość (1) jest konsekwencją rozdzielności iloczynu względem sumy zbiorów, (2) wynika z udowodnionej wyżej równości, a (3) jest definicją różnicy symetrycznej. □

4. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

10 pkt.

$$(n+1)! - 1 = \frac{(1!)^2}{0!} + \frac{(2!)^2}{1!} + \frac{(3!)^2}{2!} + \ldots + \frac{(n!)^2}{(n-1)!}.$$

Rozwiązanie: Równość z treści zadania ma postać

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k!)^2}{(k-1)!} = (n+1)! - 1. \tag{1}$$

Dla $n = 1$ lewa strona przyjmuje wartość $\sum_{k=1}^{1} \frac{(k!)^2}{(k-1)!} = \frac{(1!)^2}{0!} = 1$, a prawa $(1+1)! - 1 = 1$. Warunek początkowy jest zatem spełniony.

Wybierzmy teraz dowolną liczbą naturalną n i załóżmy, że zachodzi dla niej równość (1). Pokażemy, że równość ta zachodzi również wtedy, gdy n zastąpimy przez $n+1$, czyli

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(k!)^2}{(k-1)!} = (n+2)! - 1.$$

Mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(k!)^2}{(k-1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k!)^2}{(k-1)!} + \frac{\big((n+1)!\big)^2}{n!} \overset{(1)}{=} (n+1)! - 1 + \frac{\big((n+1)!\big)^2}{n!} = (n+1)! - 1 + \frac{(n! \cdot (n+1))^2}{n!} = \\ &= n! \cdot (n+1) + n! \cdot (n+1)^2 - 1 = n!(n+1)(1+n+1) - 1 = n!(n+1)(n+2) - 1 = (n+2)! - 1,\end{aligned}$$

co należało udowodnić. $\square$